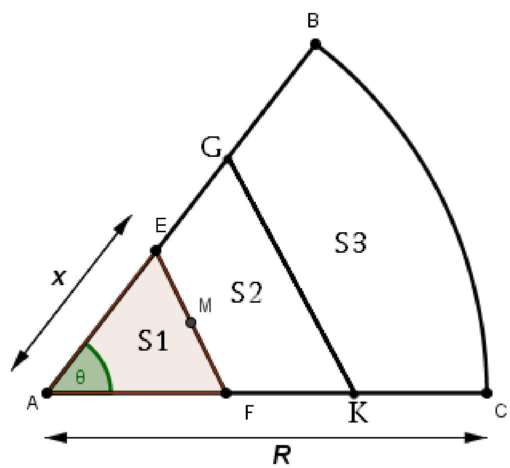
Exercice 01 :

1. On prend θ un angle dans $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ pour ne pas être trop gourmand :-)
   Calculons l'aire de la part de gâteau : $S = \dfrac{\theta \times \pi R^2}{2\pi} = \dfrac{\theta R^2}{2}$
   Calculons l'aire de S_1 :
   AEF est un triangle isocèle. On note H le projeté orthogonal de E sur $[AF]$ alors $EH = AE \times \sin\theta = x \sin\theta$
   donc $S_1 = \dfrac{EH \times AF}{2} = \dfrac{x^2 \sin\theta}{2}$
   Calculons l'aire de S_2 :
   $S_2 = S - S_1 = \dfrac{\theta R^2}{2} - \dfrac{x^2 \sin\theta}{2}$
   Il faut donc résoudre : $S_2 = 2S_1$
   $\dfrac{\theta R^2}{2} - \dfrac{x^2 \sin\theta}{2} = x^2 \sin\theta \Longleftrightarrow \theta R^2 = 3x^2 \sin\theta$
   Comme $\sin\theta > 0$ sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ alors $x^2 = \dfrac{R^2\theta}{3\sin\theta}$ donc $x = \sqrt{\dfrac{R^2\theta}{3\sin\theta}}$ donc $\boxed{x = \dfrac{R\sqrt{\theta}}{\sqrt{3\sin\theta}}}$

2. Nouvelle figure :



   On sait déjà que $S_1 = \dfrac{x^2 \sin\theta}{2}$ et que si $x = \dfrac{R\sqrt{\theta}}{\sqrt{3\sin\theta}}$ alors $S_2 + S_3 = 2S_1$
   Il suffit donc de trouver y la longueur de EG pour que $S_2 = S_1$
   $S_2 = \dfrac{(x+y)^2 \sin\theta}{2} - S_1 = xy\sin\theta + \dfrac{y^2 \sin\theta}{2}$
   Il faut donc résoudre $xy\sin\theta + \dfrac{y^2\sin\theta}{2} = \dfrac{x^2\sin\theta}{2}$ avec $x = \dfrac{R\sqrt{\theta}}{\sqrt{3\sin\theta}}$
   On a donc $2xy + y^2 = x^2 \Longleftrightarrow y^2 + 2xy - x^2 = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (2x)^2 - 4(-x^2) = 8x^2 >$ donc il y a deux racines réelles distinctes :
   $y_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2x + 2\sqrt{2}x}{2} = (\sqrt{2}-1)x$ et $y_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2x - 2\sqrt{2}x}{2} = (-\sqrt{2}-1)x$
   La seule valeur possible est $y = (\sqrt{2}-1)x$ donc $\boxed{y = \dfrac{R\sqrt{\theta}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{3\sin\theta}}}$

3. Application : $R = 20$ et $\theta = \dfrac{\pi}{4}$
   $x = \dfrac{R\sqrt{\theta}}{\sqrt{3\sin\theta}} = \boxed{\dfrac{20\sqrt{\pi}\sqrt{2}}{2\sqrt{3\sqrt{3}}}}$
   $y = \dfrac{R\sqrt{\theta}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{3\sin\theta}} = \boxed{\dfrac{20\sqrt{\pi}(2-\sqrt{2})}{2\sqrt{3\sqrt{3}}}}$
   $S = \boxed{50\pi}$ et $S_1 = S_2 = \boxed{\dfrac{50\pi}{3}}$

Exercice 02 :

On veut résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos x = \sin x$, dans $[0; 2\pi[$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ donc
   $\sqrt{3}\cos x = \sin x \Longleftrightarrow 3\cos^2 x = 1 - \cos^2 x \Longleftrightarrow 4\cos^2 x = 1 \Longleftrightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{4}$
2. $\cos^2 x = \dfrac{1}{4} \Longleftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$ ou $\cos = -\dfrac{1}{2}$
   $\Longleftrightarrow \cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ ou $\cos = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$
   $S = \left\{-\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi; \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi; \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$
   Sur $[0; 2\pi[$ les seules solutions sont : $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right\}$
3. Comme $\sqrt{3} > 0$ et que $\sqrt{3}\cos x = \sin x$ alors $\cos x$ et $sinx$ doivent avoir le même signe.
4. On a donc $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3}\right\}$

Exercice 03 :

$\dfrac{\phi}{\pi}(1 + \cos\alpha) = \dfrac{\phi}{2\pi}(2 - \sqrt{2}) \Longleftrightarrow 1 + \cos\alpha = \dfrac{1}{2}(2-\sqrt{2}) \Longleftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{2}(2-\sqrt{2}) - 1 \Longleftrightarrow \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

La seule solution sur $[0; \pi]$ est $S = \left\{\dfrac{3\pi}{4}\right\}$