Exercice 01 :

1. Etude de la fonction f

   (a) $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(1) = 16 - 4 = 12 = (2\sqrt{3})^2 > 0$
   Il y a donc deux racines réelles distinctes :
   $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$
   $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)^2 - 3$
   $a = 1 > 0$ donc le tableau des variations est :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$\searrow$	-3	$\nearrow$	

   (c) Voir la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ ci-après.

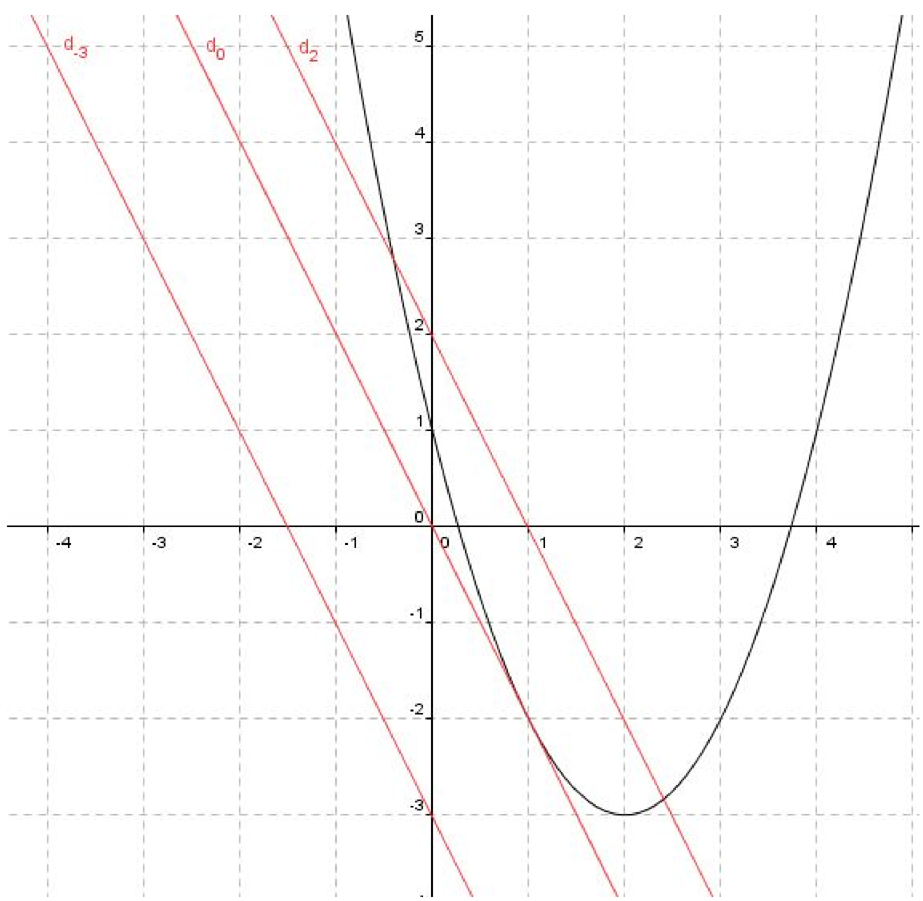
2. Pour tout nombre $m \in \mathbb{R}$, on considère la droite (D_m) d'équation $y = -2x + m$

   (a) Voir la représentation graphique.

   (b) Il semble, d'après le graphique, qu'il y a plusieurs cas possibles :
   – Si $m < 0$ alors il n'y a aucun point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et (D_m).
   – Si $m = 0$ alors il y a un seul point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et (D_m).
   – Si $m > 0$ alors il y a deux points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et (D_m).

   (c) Etudions $f(x) - (-2x+m)$
   $f(x) - (-2x+m) = x^2 - 4x + 1 + 2x - m = x^2 - 2x + (1-m)$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(1-m) = 4 - 4 + 4m = 4m$
   – Si $m < 0$ alors $\Delta < 0$ donc il n'y a aucun point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et (D_m).
   – Si $m = 0$ alors alors $\Delta = 0$ donc il y a un seul point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et (D_m).
   – Si $m > 0$ alors alors $\Delta > 0$ donc il y a deux points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et (D_m).

   (d) Nous sommes dans le cas où $m = 0$
   $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2} = 1$
   or $f(1) = 1 - 4 + 1 = -2$ donc les coordonnées du point d'intersection sont $A(1;-2)$



Exercice 02 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

1. $\dfrac{x-1}{3x-7} \leq \dfrac{x-4}{x}$ existe $\Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \dfrac{7}{3}\right\}$

   $\dfrac{x-1}{3x-7} \leq \dfrac{x-4}{x} \Longleftrightarrow \dfrac{x-1}{3x-7} - \dfrac{x-4}{x} \leq 0$

   $\Longleftrightarrow \dfrac{(x-1)x-(x-4)(3x-7)}{x(3x-7)} \leq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{-2(x^2-9x+14)}{x(3x-7)} \leq 0$

   Cherchons les racines de $x^2-9x+14$: $\Delta = b^2-4ac = 81-56 = 25 = (5)^2 > 0$

   Il y a donc deux racines réelles distinctes :

   $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9+5}{2} = 7$

   $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9-5}{2} = 2$

   Tableau des signes :

x	$-\infty$		0		2		$7/3$		7		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$x^2-9x+14$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x(3x-7)$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
Q		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

   donc $S =]-\infty; 0[\cup \left[2; \dfrac{7}{3}\right[\cup [7; +\infty[$

2. $\dfrac{-3x^2+16x+22}{(2x+5)(x-1)^2} < 0$ existe $\Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{1; \dfrac{5}{2}\right\}$

   Cherchons les racines de $-3x^2+16x+22$: $\Delta = b^2-4ac = 520 = (2\sqrt{130})^2 > 0$

   Il y a donc deux racines réelles distinctes :

   $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-16+2\sqrt{130}}{-6} = \dfrac{8-\sqrt{130}}{3}$

   $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-16-2\sqrt{130}}{-6} = \dfrac{8+\sqrt{130}}{3}$

   Tableau des signes :

x	$-\infty$		$-5/2$		x_1		1		x_2		$+\infty$
$-3x^2+16x+22$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$2x+5$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$(x-1)^2$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
Q		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

   donc $S = \left]-\dfrac{5}{2}; x_1\right[\cup]x_2; +\infty[$

3. $\dfrac{3x^2-2x+5}{2x+1} \geq \dfrac{-11x^2+11x+12}{2x^2-5x-3}$ existe $\Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}; 3\right\}$

   En calculant le discriminant de $2x^2-5x-3$ on obtient deux solutions $x_1 = 3$ et $x_2 = -\dfrac{1}{2}$

   donc $2x^2-5x-3 = 2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-3) = (2x+1)(x-3)$

   $\dfrac{3x^2-2x+5}{2x+1} \geq \dfrac{-11x^2+11x+12}{2x^2-5x-3} \Longleftrightarrow \dfrac{3x^2-2x+5}{2x+1} - \dfrac{-11x^2+11x+12}{(2x+1)(x-3)} \geq 0$

   $\dfrac{(3x^2-2x+5)(x-3)-(-11x^2+11x+12)}{(2x+1)(x-3)} \geq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{3(x^3-9)}{(2x+1)(x-3)} \geq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{3(x^3-9)}{(2x+1)(x-3)} \geq 0$ avec $x \neq 3$

   Tableau des signes :

x	$-\infty$		$-1/2$		$9^{1/3}$		3		$+\infty$
x^3-9		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(2x+1)(x-3)$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
Q		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

   donc $S = \left]-\dfrac{1}{2}; 9^{1/3}\right] \cup]3; +\infty[$