Exercice 1 :

1. M est un point de $[AB]$ distinct de A et B donc x est un réel de l'intervalle $]0;6[$
   Aire du disque de diamètre AB : $S_1 = \frac{1}{2}\pi \times 3^2 = \frac{9}{2}\pi$
   Aire du disque de diamètre AM : $S_2 = \frac{1}{2}\pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 5 = \frac{\pi}{8}x^2$
   Aire du disque de diamètre MB : $S_3 = \frac{1}{2}\pi \times \left(\frac{6-x}{2}\right)^2 5 = \frac{\pi}{8}(6-x)^2$
   Donc
   $S(x) = S_1 - S_2 - S_3 = \frac{9}{2}\pi - \frac{\pi}{8}x^2 - \frac{\pi}{8}(6-x)^2 = \pi\left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\right)$ donc $\boxed{S(x) = \pi\left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\right)}$

2. $D = \frac{9}{2}\pi$
   (a) $S(x) = \frac{D}{2} \iff \pi(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x) = \frac{9}{4}\pi \iff -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{9}{4} \iff x^2 - 6x + 9 = 0$
   $\iff (x-3)^2 = 0 \iff x = 3.$ $\boxed{s = \{3\}}$
   (b) $\frac{D}{6} \leq S(x) \leq \frac{D}{4} \iff \begin{cases} S(x) \geq \frac{D}{6} \\ S(x) \leq \frac{D}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x \geq \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x \leq \frac{9}{8} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 6x + 3 \leq 0 \\ 2x^2 - 12x + 9 \geq 0 \end{cases}.$
   $x^2 - 6x + 3$ a pour racines $x_1 = 3 - \sqrt{6}$ et $x_2 = 3 + \sqrt{6}$ et est du signe de a, soit positif, à l'extérieur de ses racines donc $x^2 - 6x + 3 \leq 0 \iff x \in [3 - \sqrt{6}; 3 + \sqrt{6}]$
   $2x^2 - 12x + 9$ a pour racines $x_3 = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$ et $x_2 = 3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$ et est du signe de a, soit positif, à l'extérieur de ses racines donc $x^2 - 6x + 3 \geq 0 \iff x \in]-\infty; 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}] \cup [3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}; +\infty[$
   $\frac{D}{6} \leq S(x) \leq \frac{D}{4} \iff \begin{cases} x \in [3 - \sqrt{6}; 3 + \sqrt{6}] \\ x \in]-\infty; 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}] \cup [3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}; +\infty[\end{cases}$
   Comme $0 < 3 - \sqrt{6} < 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2} < 3 + \frac{3}{2}\sqrt{2} < 3 + \sqrt{6} < 6$,
   $\boxed{s = [3 - \sqrt{6}; 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}] \cup [3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}; 3 + \sqrt{6}]}$

Exercice 2 :

1. Si $\boxed{\alpha \text{ et } \beta \text{ sont solutions distinctes de } ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)}$
   alors $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ et $a\beta^2 + b\beta + c = 0$
   On peut soustraire les deux équations et on obtient :
   $a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta) = 0$
   $\iff a(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) + b(\alpha - \beta) = 0$
   Or α et β sont distincts donc on peut diviser par $\alpha - \beta$
   donc $a(\alpha + \beta) + b = 0$
   or $a \neq 0$ donc $\boxed{\alpha + \beta = -\frac{b}{a}}$
   De plus :
   $\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ donc $a\alpha^2 - a(\alpha + \beta)\alpha + c = 0$ en remplaçant b par $-a(\alpha + \beta)$
   donc $a\alpha^2 - a\alpha^2 - a\alpha\beta + c = 0 \iff \boxed{\alpha\beta = \frac{c}{a}}$

2. Si $\boxed{S = \alpha + \beta \text{ et } P = \alpha\beta}$ montrons que α et β sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$
   $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-(\alpha + \beta))^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles distinctes :
   $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2} = \alpha$ donc $\boxed{x_1 = \alpha}$
   $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\alpha + \beta - \alpha + \beta}{2} = \beta$ donc $\boxed{x_2 = \beta}$