Exercice 01 :

On note f et g deux fonctions polynômes du second degré, définies par : $f : x \longmapsto 2x^2 + 2x - 4$ et $g : x \longmapsto -(x+3)(x+2)$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leur représentation graphique respectives dans un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

1. f et g sont des polynômes du second degré donc $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$
   Forme canonique de $f(x)$:
   $f(x) = 2x^2+2x-4 = 2(x^2+x-2) = 2\left(\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} - 2\right) = 2\left(\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4}\right) = \boxed{2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{2}}$
   Forme factorisée de $f(x)$:
   $f(x) = 2\left(\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4}\right) = 2\left(x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\right) = \boxed{2(x+2)(x-1)}$
3. Forme développée de $g(x)$:
   $g(x) = -(x+3)(x+2) = -(x^2+2x+3x+6) = -(x^2+5x+6) = \boxed{-x^2-5x-6}$
   Forme canonique de $g(x)$:
   $g(x) = -(x^2+5x+6) = -\left(\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4} - 6\right) = -\left(\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}\right) = \boxed{-\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}}$
4. Coordonnées des point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses.
   D'après la forme factorisée, les points d'intersection sont $A(1;0)$ et $B(-2;0)$
   Coordonnées des point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des ordonnées.
   D'après la forme développée, le point d'intersection est $C(0;-4)$
5. Coordonnées des point d'intersection entre $\mathcal{C}_g$ et l'axe des abscisses.
   D'après la forme factorisée, les points d'intersection sont $D(-3;0)$ et $B(-2;0)$
   Coordonnées des point d'intersection entre $\mathcal{C}_g$ et l'axe des ordonnées.
   D'après la forme développée, le point d'intersection est $E(0;-6)$
6. Tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$-\dfrac{9}{2}$	$\nearrow$	

   Tableau des variations de g :

x	$-\infty$		$-\dfrac{5}{2}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\dfrac{1}{4}$	$\searrow$	

7. $\mathcal{C}_f$ est une parabole tournée vers le haut, de sommet $S_1\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{9}{2}\right)$
   $\mathcal{C}_g$ est une parabole tournée vers le bas de sommet $S_2\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{4}\right)$
8. $M \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g$
   $\iff f(x) = g(x)$
   $\iff 2(x-1)(x+2) = -(x+3)(x+2)$
   $\iff 2(x-1)(x+2) + (x+3)(x+2) = 0$
   $\iff (x+2)(2x-2+x+3) = 0$
   $\iff (x+2)(3x+1) = 0$
   $\iff x = -2$ ou $x = -\dfrac{1}{3}$
   De plus
   $f(-2) = g(-2) = 0$

et
$f\left(-\frac{1}{3}\right) = g\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{40}{9}$
donc les points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont :

$$B(-2;0) \text{ et } F\left(-\frac{1}{3};-\frac{40}{9}\right)$$

9. Etudions le signe de $f(x)-g(x)$:
$f(x)-g(x) = (x+2)(3x+1)$ d'après la question précédente.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$3x+1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc
Si $x \in]-\infty;-2[\cup\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$ alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.
Si $x \in \left]-2;-\frac{1}{3}\right[$ alors $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.

Exercice 02 :

$f : x \longmapsto 2x^2 - 2(\sqrt{3}-\sqrt{5})x - 2\sqrt{15}$
Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$
On trouve
$f(x) = 2\left(x - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}{2}$
et
$f(x) = 2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{5})$