1. ϕ_1 étant la somme de 1 avec une quantité positive, $\phi_1 \neq 0$ donc ϕ_1^{-1} existe et
   $\phi_1^{-1} = \dfrac{1}{\phi_1} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dots}}}}$

2. $\phi_1 - 1 = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dots}}} - 1 = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dots}}}$

3. D'après 1. et 2., on a : $\dfrac{1}{\phi_1} = \phi_1 - 1 \iff \phi_1(\phi_1 - 1) = 1 \iff {\phi_1}^2 - \phi_1 - 1 = 0$
   donc ϕ_1 est une solution de l'équation du second degré $(E_0) : x^2 - x - 1 = 0$.

4. D'après 3. ϕ_1 vérifie ${\phi_1}^2 - \phi_1 - 1 = 0$ donc ${\phi_1}^2 = \phi_1 + 1 = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dots}}} + 1 = 2 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dots}}}$

5. $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4} = 0 \iff x^2 - x + \dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{4} = 0 \iff x^2 - x - 1 = 0$ qui est (E_0).

6. $x^2 - x - 1 = 0 \iff \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4} = 0 \iff \left(x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$
   $\iff x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} = 0$ ou $x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2} = 0$
   $\iff x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ donc $S = \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

7. ϕ_1 est solution de (E_0) et ϕ_1 étant la somme de 1 avec une quantité positive, $\phi_1 > 0$ donc $\phi_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$