Exercice 01 :

1. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, comme $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ}) \equiv \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$
alors $J\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ de plus $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BK}) \equiv \dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$ donc $K\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$
2. On a donc $D(0;1)$, $J\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $K\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$
$\overrightarrow{DJ}\left(\dfrac{1}{2}-0; \dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$ donc $\overrightarrow{DJ}\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$
$\overrightarrow{DK}\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-0; \dfrac{1}{2}-1\right)$ donc $\overrightarrow{DK}\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$
$x_{\overrightarrow{DJ}}y_{\overrightarrow{DK}} - x_{\overrightarrow{DK}}y_{\overrightarrow{DJ}} = \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) - \left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right) = -\dfrac{1}{4} - \left(\dfrac{3}{4}-1\right) = -\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4} = 0$
Les vecteurs DJ et DK sont colinéaires donc les points D, J et K sont alignés.

Exercice 02 :

$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD} = -5\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = -5\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$
De plus
$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} = -5\overrightarrow{AC} + \dfrac{5}{4}\overrightarrow{AB} = \dfrac{5}{4}\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$
On a donc $\overrightarrow{FD} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{FE}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont colinéaires et F, D et E sont alignés.

Exercice 03 :

1. On a $x = a + \dfrac{1}{b+\dfrac{1}{x}} \Leftrightarrow x = a + \dfrac{x}{bx+1} \Leftrightarrow x = \dfrac{abx+a+x}{bx+1} \Leftrightarrow bx^2 + x = abx + a + x \Leftrightarrow bx^2 - abx - a = 0$
2. Résolution de $bx^2 - abx - a = 0$
$\Delta = (-ab)^2 - 4b(-a) = a^2b^2 + 4ab = ab(ab+4)$
a et b étant strictement positifs alors $\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :
$x_1 = \dfrac{ab+\sqrt{ab(ab+4)}}{2b}$ ou $x_2 = \dfrac{ab-\sqrt{ab(ab+4)}}{2b}$
a et b étant strictement positif, alors $\sqrt{ab(ab+4)} > ab$ et donc $x_1 > 0$ et $x_2 < 0$
or x est aussi la solution positive de cette équation donc :
$$x = a + \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+...}}} = \frac{ab+\sqrt{ab(ab+4)}}{2b}$$
3. En déduire une écriture simple de x dans les cas suivants :
   (a) $x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
   (b) $x = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+...}}} = \dfrac{2+\sqrt{12}}{4} = \dfrac{2(1+\sqrt{3})}{4} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$
4. En déduire une écriture sous forme de fraction continue de x dans les cas suivants :
   (a) $x = 1+\sqrt{3} = \dfrac{2+\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2\times1+\sqrt{2\times1(2\times1+4)}}{2\times1} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+...}}}$
   (b) $x = \dfrac{3+\sqrt{21}}{6} = \dfrac{1\times3+\sqrt{1\times3(1\times3+4}}{2\times3} = 1 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+...}}}$