Exercice 1 :

Pour chacune des fonctions ci-dessous, trouver le nombre dérivé (s'il existe) de la fonction au point d'abscisse $x_0 = a$ et l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0

$f(x) = 3x - 7$ pour $a = 1$	$g(x) = 5x^2 - 7$ pour $a = -1$	$h(x) = -3(2x+3)^2$ pour $a = 0$
$w(x) = (2x+3)(x-1)$ pour $a = 1$	$v(x) = \dfrac{3}{4}x - 2x + 1$ pour $a = -2$	$i(x) = 4(2x-7)^2 - 9$ pour $a = 0$
$j(x) = \dfrac{2}{3x-4}$ pour $a = 1$	$k(x) = \dfrac{5x-2}{4x+1}$ pour $a = 5$	$l(x) = \dfrac{2}{5x-3} - \dfrac{5}{6x+1}$ pour $a = -1$
$m(x) = \sqrt{3x-5}$ pour $a = 4$	$n(x) = \sqrt{7-2x}$ pour $a = -1$	$o(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5x-2}}$ pour $a = 1$

Exercice 2 :

Pour chacune des fonctions ci-dessous, trouver l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivation et la fonction dérivée.

$f(x) = -2x^2 + 5x^3 - \sqrt{2}x + \pi$	$g(x) = 7(-2x-1) + 3x^2 + 1$	$h(x) = (-2x-1)(3x^2+1)$
$w(x) = \dfrac{1}{3x^2+1}$	$v(x) = (5x+1)^4$	$i(x) = \sqrt{-x+1}$
$j(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{2x-1}$	$k(x) = x^2\sqrt{x-1}$	$l(x) = \dfrac{3-4x}{3x-4}$
$m(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$	$n(x) = \dfrac{x^2-11x+30}{x^2-x}$	$o(x) = \dfrac{2\sin x}{\cos x}$
$p(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$	$q(x) = (\sin x + \cos x)^2$	$r(x) = \cos(-3x+5)$
$s(x) = \sqrt{-3x+5}$	$t(x) = x\sqrt{2x-3}$	$u(x) = \dfrac{1+(1-x)^2}{x}$
$v(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 7x^3$	$w(x) = 3\sqrt{x} + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{5}{x}$	$z(x) = 4x^{10} - 5x^6 + \dfrac{1}{x^7}$
$a(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^3+6}$	$b(x) = \dfrac{3x^2+2\sqrt{x}}{x}$	$c(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

Exercice 3 :

On note f la fonction définie par $f : x \longmapsto 3x^5 - 25x^3 + 60x$

1. Déterminer son domaine de définition.
2. Déterminer f'.
3. Déterminer les extremums de la fonction f.
4. Déterminer les variations de la fonction f.
5. Déterminer l'équation de (Δ) la tangente en $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a = 0$.
6. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ) dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sur l'intervalle $[-2.5; 2.5]$.

Correction de l'exercice 1 :

1. $f'(1) = 3$ et $y = 3x - 7$
2. $g'(-1) = -10$ et $y = -10x - 13$
3. $h'(0) = -36$ et $y = -36x - 27$
4. $w'(1) = 5$ et $y = 5x - 5$
5. $v'(-2)$ et $y = -5x - 2$
6. $i'(0)) = -112$ et $y = -112x + 187$
7. $j'(1) = -6$ et $y = -6x + 4$
8. $k'(5) = \dfrac{13}{441}$ et $y = \dfrac{13}{441}x + \dfrac{418}{441}$
9. $l'(-1) = \dfrac{167}{160}$ et $y = \dfrac{167}{160}x + \dfrac{287}{160}$
10. $m'(4) = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}$ et $y = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}x + \dfrac{2\sqrt{7}}{14}$
11. $n'(-1) = -\dfrac{1}{3}$ et $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3}$
12. $o'(1) = -\dfrac{5\sqrt{3}}{18}$ et $y = -\dfrac{5\sqrt{3}}{18}x + \dfrac{11\sqrt{3}}{18}$

Correction de l'exercice 2 :

1. $D_f = \mathbb{R}$ $\quad D_{f'} = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 15x^2 - 4x - \sqrt{2}$
2. $D_g = \mathbb{R}$ $\quad D_{g'} = \mathbb{R}$ $\quad g'(x) = -14 + 6x$
3. $D_h = \mathbb{R}$ $\quad D_{h'} = \mathbb{R}$ $\quad h'(x) = -18x^2 - 6x - 2$
4. $D_w = \mathbb{R}$ $\quad D_{w'} = \mathbb{R}$ $\quad w'(x) = \dfrac{-6x}{(3x^2+1)^2}$
5. $D_v = \mathbb{R}$ $\quad D_{v'} = \mathbb{R}$ $\quad v'(x) = 20(5x+1)^3$
6. $D_i =]-\infty; 1]$ $\quad D_{i'} =]-\infty; 1[$ $\quad i'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{-x+1}}$
7. $D_j = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ $\quad D_{j'} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ $\quad j'(x) = \dfrac{8x^2 - 8x}{(2x-1)^2}$
8. $D_k = [1; +\infty[$ $\quad D_{k'} =]1; +\infty[$ $\quad k'(x) = \dfrac{x(5x-4)}{2\sqrt{x-1}}$
9. $D_l = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$ $\quad D_{l'} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$ $\quad l'(x) = \dfrac{7}{(3x-4)^2}$
10. $D_m = \mathbb{R}$ $\quad D_{m'} = \mathbb{R}$ $\quad m'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$
11. $D_n = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ $\quad D_{n'} = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ $\quad n'(x) = \dfrac{10(x^2 - 6x + 3)}{(x^2 - x)^2}$
12. $D_o = D_{o'} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad o'(x) = 2(1 + \tan^2 x) = \dfrac{2}{\cos^2 x}$
13. $D_p = D_{p'} = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; -\pi + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$ $\quad p'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
14. $D_q = D_{q'} = \mathbb{R}$ $\quad q'(x) = 2(1 - 2\sin^2 x) = 2(2\cos^2 x - 1)$
15. $D_r = D_{r'} = \mathbb{R}$ $\quad r'(x) = 3\sin(-3x + 5)$

16. $D_s = \left]-\infty; \frac{5}{3}\right]$ $\quad D_{s'} = \left]-\infty; \frac{5}{3}\right[$ $\quad s'(x) = -\dfrac{3}{2\sqrt{-3x+5}}$
17. $D_t = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ $\quad D_{t'} = \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ $\quad t'(x) = \dfrac{3(x-1)}{\sqrt{2x-3}}$
18. $D_u = D_{u'} = \mathbb{R}$ $\quad u'(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2}$
19. $D_v = D_{v'} =]0; +\infty[$ $\quad v'(x) = -\dfrac{1+42x^3\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$
20. $D_w = D_{w'} =]0; +\infty[$ $\quad w'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - \dfrac{6}{x^3} + \dfrac{5}{x^2}$
21. $D_z = D_{z'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad z(x) = 40x^9 - 30x^5 - \dfrac{7}{x^8}$

Exercice 3 :

On note f la fonction définie par $f : x \longmapsto 3x^5 - 25x^3 + 60x$

1. $f(x)$ existe pour toutes les valeurs de x de $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$.
2. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 15x^4 - 75x^2 + 60$
3. Les extrémums sont les $f(a)$ tels que $f'(a) = 0$
   Il faut donc résoudre $f'(x) = 0$
   1 et -1 sont des racines évidentes du polynôme $f'(x)$ donc d'après le théorème de décomposition des polynômes, il existe Q un polynôme de degré 2 tel que :
   $f'(x) = (x-1)(x+1) \times Q(x)$
   Il existe $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $f'(x) = (x^2-1)(ax^2+bx+c)$
   $f'(x) = ax^4 + bx^3 + (c-a)x^2 - bx - c$ et par identification avec $f'(x) = 15x^4 - 75x^2 + 60$ on trouve :
   $f'(x) = (x^2-1)(15x^2-60)$
   donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = -2$.
   Les extrémums sont donc :
   - Pour $x = 1$, $f(1) = 3 - 25 + 60 = 38$
   - Pour $x = -1$, $f(-1) = 3(-1)^5 - 25(-1)^3 + 60(-1) = -36$
   - Pour $x = 2$, $f(2) = 3(2)^5 - 25(2)^3 + 60(2) = 16$
   - Pour $x = -2$, $f(-2) = 3(-2)^5 - 25(-2)^3 + 60(-2) = -16$
4. Cherchons le signe de $f'(x)$ puis les variations de f:
   $f'(x) = 15(x+1)(x-1)(x-2)(x+2)$

x $+\infty$	$-\infty$		-2		-1		1		2	
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
			-16				38			
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
					-36				16	

5. L'équation de (Δ) est de la forme : $y = f'(0)x + f(0)$
   Or $f'(0) = 15(0-1)(0+1)(0+2)(0-2) = 60$ et $f(0) = 0$ donc $y = 60x$

6. Représentation graphique de f et de Δ :