

Les angles orientés

Première S

L'équipe des professeurs de mathématiques
Lycée Stendhal

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes
comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes
d'aversion.

Stendhal

Année 2011-2012

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

CODE	INTITULE	Bilan		
		A	EA	NA
G0101	Trouver la mesure principale de la mesure d'un angle orienté			
G0102	Placer un point sur le cercle trigo à l'aide de la mesure d'un angle orienté			
G0103	Déterminer le cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté			
G0104	Savoir déterminer le sinus connaissant le cosinus et inversement			
G0105	Connaître et savoir utiliser les formules des angles associés			
G0106	Résoudre une équation en cosinus ou en sinus			

Les Angles orientés

(En première S)

Dernière mise à jour : Dimanche 23 Octobre 2011

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2011-2012)

1 Objectifs

L'objectif de ce chapitre est de savoir utiliser l'unité des radians qui est l'unité internationale de la mesure des angles. De maîtriser les formules de calcul sur les angles orientés de vecteurs, de découvrir et utiliser les formules de trigonométrie.

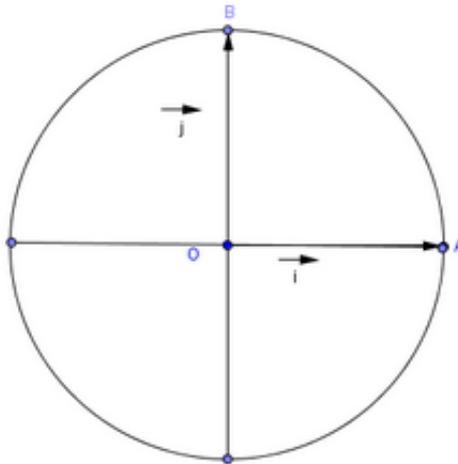
2 Mesure d'un angle en radian

2.1 Le cercle trigonométrique

Soit un cercle de rayon 1 et de centre O .

Soient A et B deux points du cercle tels que $(OA) \perp (OB)$

On définit alors un repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$



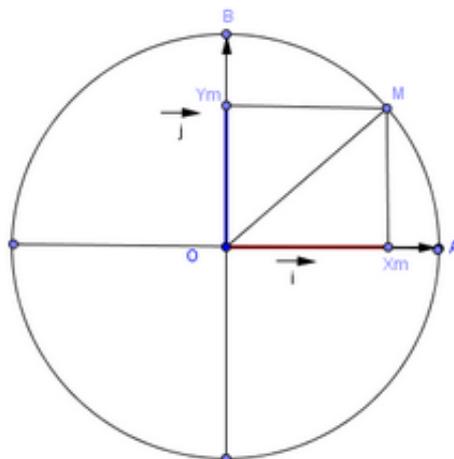
2.2 Comment repérer un point sur ce cercle ?

Il y a au moins trois façons de repérer un point M sur le cercle.

- ➡ Par ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$.
- ➡ Par la mesure de l'angle \widehat{AOM} en degrés.
- ➡ Par la longueur de l'arc de cercle \widehat{AM} .

– Les coordonnées du point M :

En connaissant les coordonnées $M(x_m; y_m)$ on peut placer ce point dans le repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$.



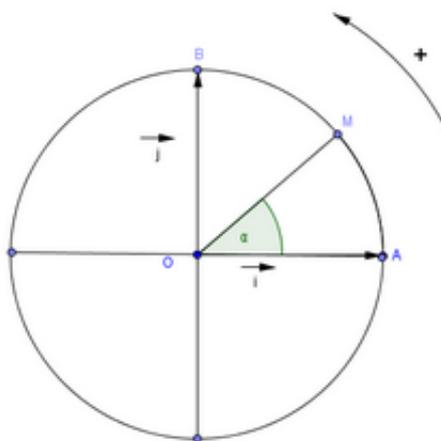
Remarque : $OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$

- La mesure de l'angle \widehat{AOM} en degrés :

En connaissant la mesure de l'angle $\widehat{AOM} = \alpha^\circ$ ($\alpha \geq 0$) on peut placer ce point dans le repère mais il y a deux possibilités. Pour éviter d'avoir ce problème, on va orienter le cercle et lui donner un sens positif.

Sens positif (Direct) : Sens inverse des aiguilles d'une montre

Sens négatif (Indirect) : Sens des aiguilles d'une montre

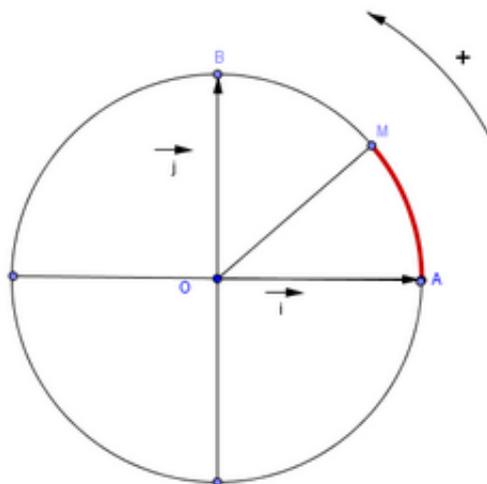


- La longueur de l'arc de cercle \widehat{AM} :

En connaissant la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AM} = \alpha$ ($\alpha \geq 0$) on peut placer ce point dans le repère mais il y a deux possibilités. Pour éviter d'avoir ce problème, on va orienter le cercle et lui donner un sens positif.

Sens positif (Direct) : Sens inverse des aiguilles d'une montre

Sens négatif (Indirect) : Sens des aiguilles d'une montre



Nous allons, dans ce chapitre, plus particulièrement étudier ce repérage avec les arcs de cercle.

Définition : (Cercle trigonométrique)

Le cercle trigonométrique est le cercle de rayon 1 orienté dans le sens direct.

2.3 Les angles orientés en radians

Définition : (Angles en radians)

Soient A et M deux points du cercle trigonométrique de centre O .

La mesure en radians de l'angle \widehat{AOM} est la longueur de l'arc \widehat{AM}

Quelle est la longueur du cercle trigonométrique ?

On utilise pour cela la formule du périmètre d'un cercle : $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$

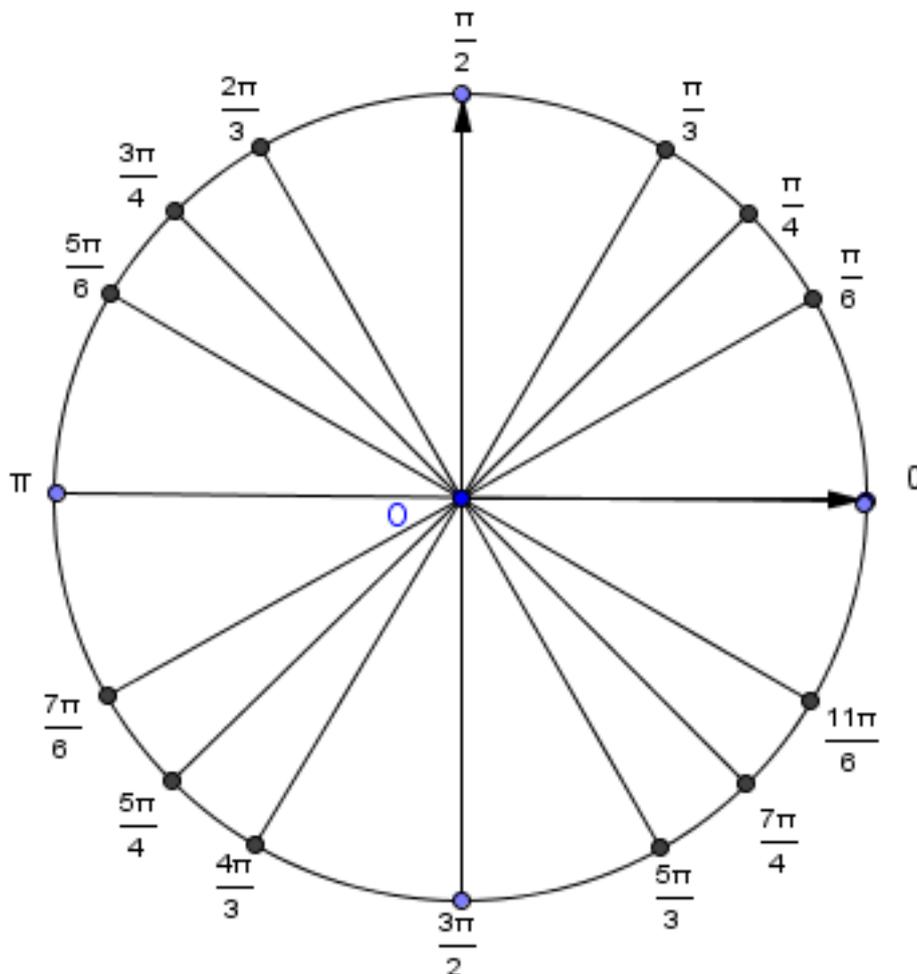
Donc le cercle trigonométrique a une longueur totale de 2π

Si on place un point M sur le cercle, l'arc \widehat{AM} aura donc une longueur qui sera un multiple ou un sous multiple de 2π .

Correspondance entre les angles en degrés et les angles en radians.

Angle en degrés	360	180	90	60	45	30
Angle en radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

A l'aide de ce tableau on peut alors placer sur le cercle trigonométrique les points suivants :



2.4 Mesure principale d'un angle en radians

Activité :

Placer les points M sur le cercle trigonométrique, sachant que \widehat{AOM} est :

$$\frac{\pi}{3}; \quad \frac{8\pi}{3}; \quad -\frac{5\pi}{3}; \quad \frac{13\pi}{3}; \quad -\frac{11\pi}{3}$$

On remarque que plusieurs mesures d'un angle, définissent les mêmes points. Il y a donc plusieurs valeurs possibles d'un angle en radians.

Nous allons en définir une plus particulièrement : **La mesure principale**.

Définition : (Mesure principale d'un angle)

La mesure principale d'un angle est l'unique mesure appartenant à $] -\pi; \pi]$

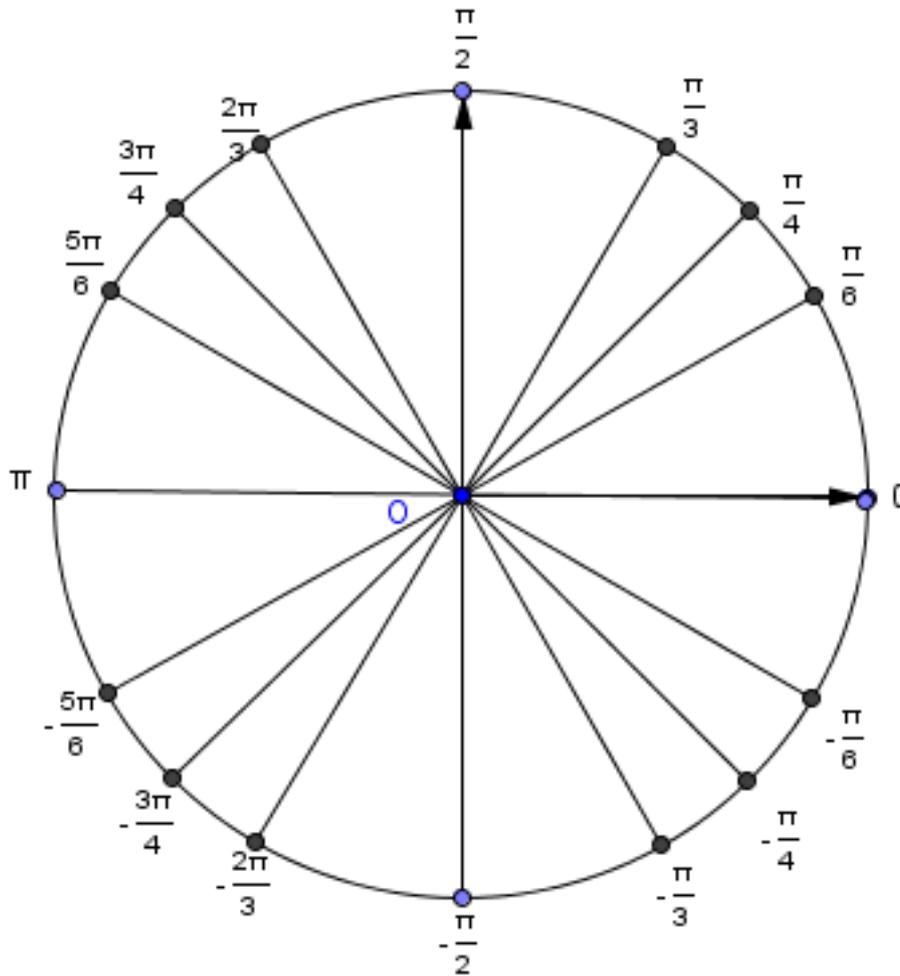
Exemples :

➡ La mesure principale de $\alpha = \frac{21\pi}{2}$ est : $\frac{\pi}{2}$.

➡ La mesure principale de $\alpha = \frac{13\pi}{3}$ est : $\frac{\pi}{3}$.

➡ La mesure principale de $\alpha = -\frac{13\pi}{2}$ est : $-\frac{\pi}{6}$.

Les mesures principales les plus utilisées sont :



3 La trigonométrie

Activité :

Soit un cercle trigonométrique de centre A .

Soient C et D deux points du cercle tels que $(AC) \perp (AD)$. On note B un point du cercle tel que $\widehat{CAB} = \alpha$ rd.

On note G le projeté orthogonal de B sur $(O; \vec{i})$ et H le projeté orthogonal de B sur $(O; \vec{j})$.

1. Calculer AG en fonction de α .
2. Calculer AH en fonction de α .

3.1 Définition du cosinus et du sinus

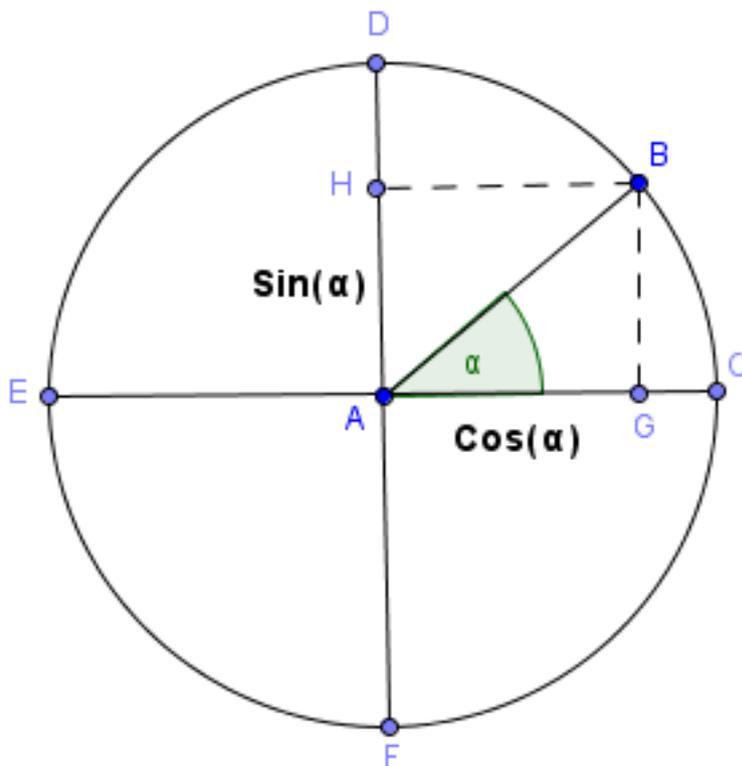
Définition : (Cosinus et Sinus d'un angle)

Soit α un réel quelconque.

Il lui correspond un unique point M du cercle trigonométrique tel que $\widehat{CAM} = \alpha$ rd.

► On note $\cos(\alpha)$ l'abscisse de M dans (O, \vec{i}, \vec{j}) .

► On note $\sin(\alpha)$ l'ordonnée de M dans (O, \vec{i}, \vec{j}) .



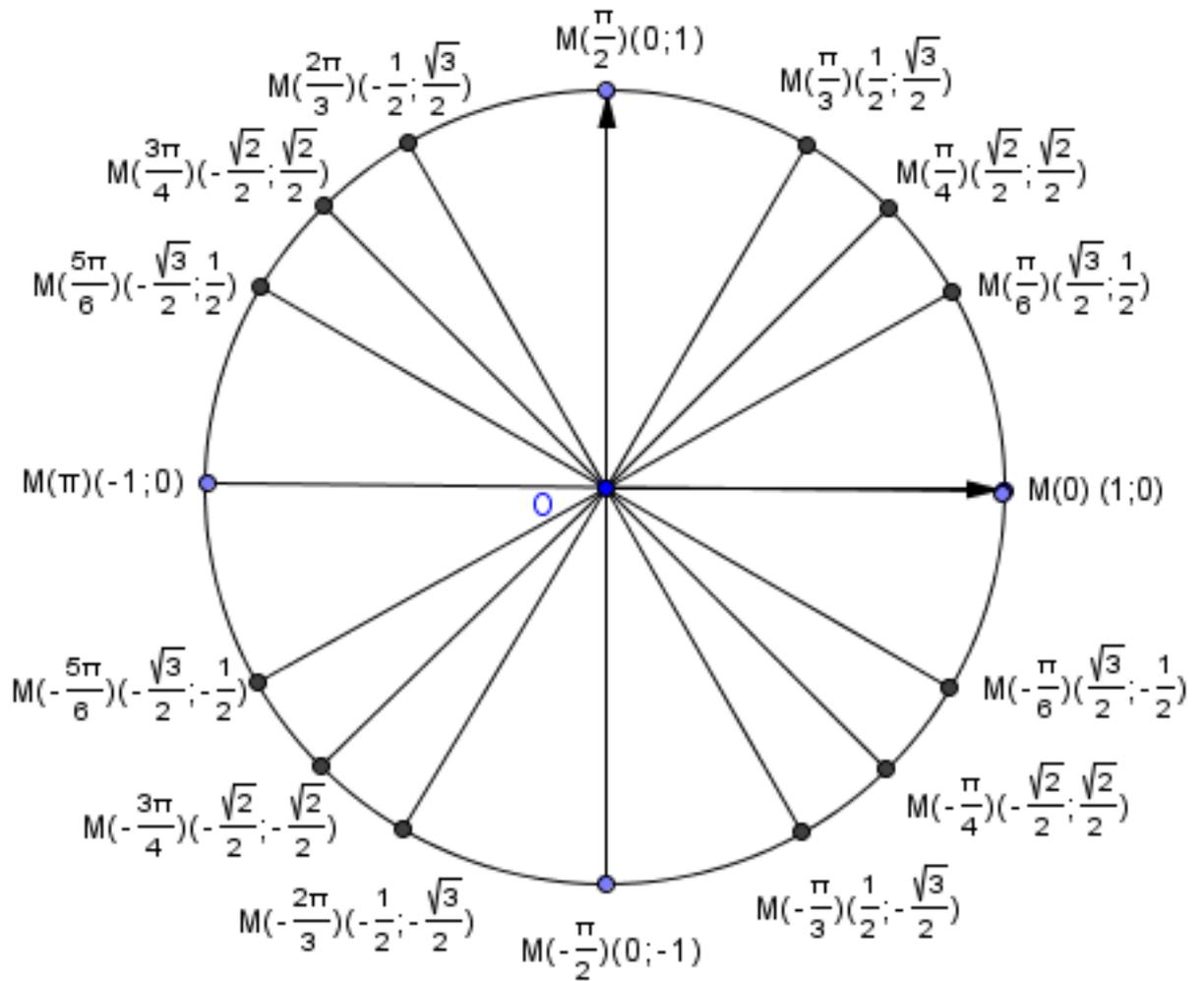
Propriétés :

1. Dans (O, \vec{i}, \vec{j}) alors M a pour coordonnées $(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$

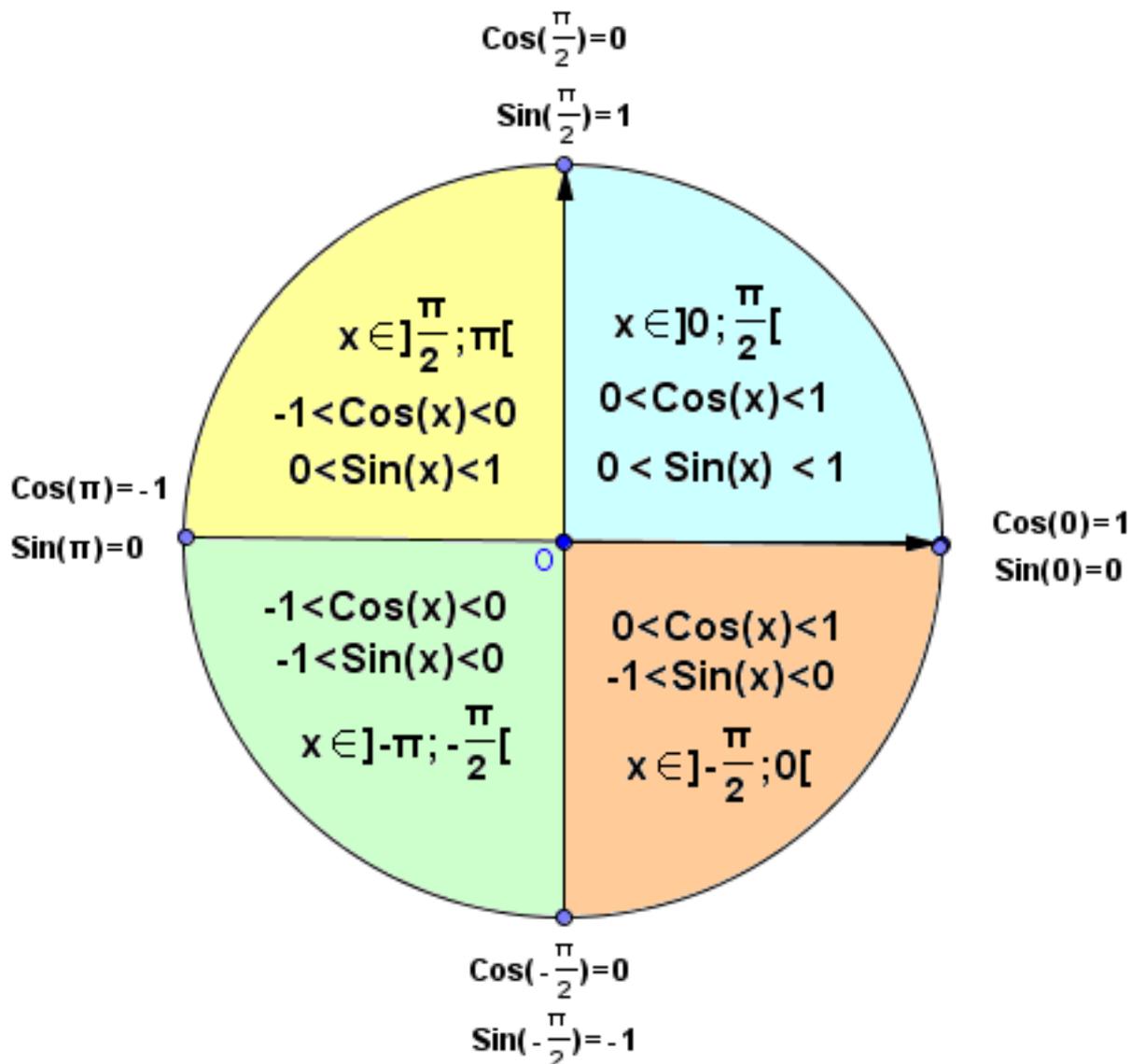
Tableau des valeurs à connaître par coeur :

α rd	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Quelques valeurs remarquables :



Représentation des propriétés :



3.2 Définition de la tangente

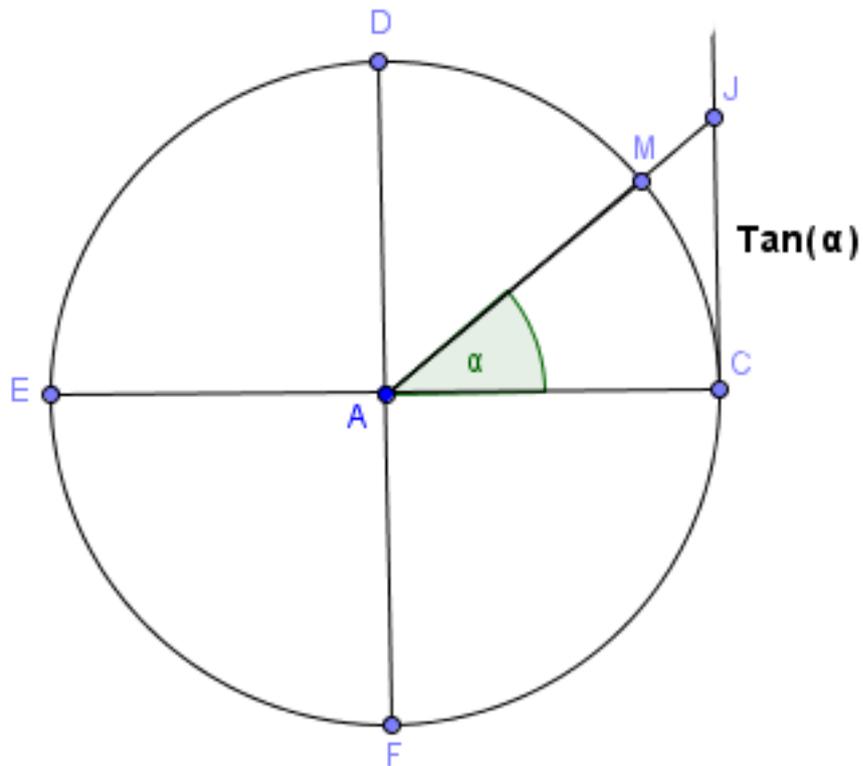
Activité :

Soit un cercle trigonométrique de centre A .

Soient C et D deux points du cercle tels que $(AC) \perp (AD)$. On note M un point du

cercle tel que $\widehat{CAM} = \alpha$ rd et J le point d'intersection entre (AM) et la tangente au cercle passant par C .

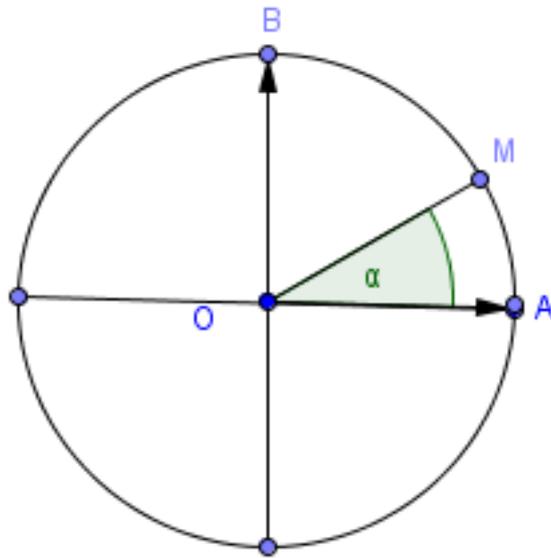
Calculer CJ en fonction de α .



Définition : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, si $\cos(\alpha) \neq 0$ alors $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

3.3 Relations trigonométriques et angles associés

Activité :



Placer sur le cercle : $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\pi + \alpha$, $\pi - \alpha$, et $-\alpha$

On obtient donc les formules suivantes :

$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos(\alpha) \quad \sin(2\pi + \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \quad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha) \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$$

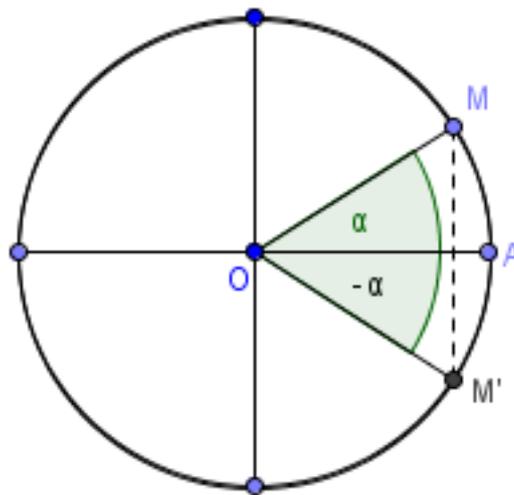
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

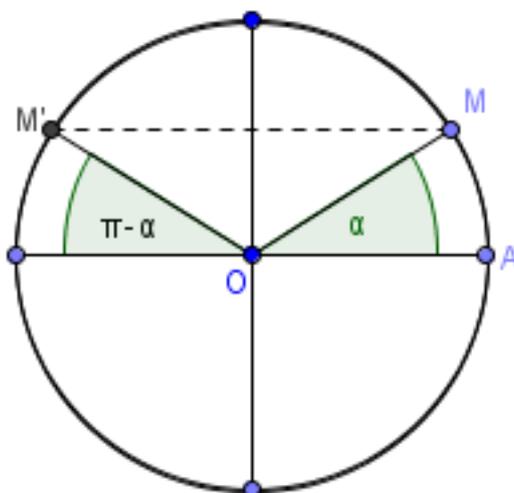
3.4 Les équations trigonométriques

3.4.1 Equation du type $\cos(x) = \cos(a)$ connaissant a



$$\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

3.4.2 Equation du type $\sin(x) = \sin(a)$ connaissant a



$$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

4 Les angles de vecteurs

4.1 Définition

On note A et M deux points du cercle trigonométrique de centre O .

Définition : (Mesure d'un l'angle orienté)

La mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ est la mesure de l'angle \widehat{AOM} ou la longueur de l'arc \widehat{AOM}

4.2 Propriétés

On note \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs unitaires. (ie : Leur norme est égale à 1)

Propriété :

$$\forall k_1 \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall k_2 \in \mathbb{R}_+^* \text{ alors } (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{k_1\vec{u}, k_2\vec{v}})$$

Une conséquence est que si deux vecteurs ne sont pas de norme égale à 1 alors on peut toujours se ramener à des vecteurs unitaires car :

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \left(\widehat{\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}, \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}} \right)$$

et donc se placer sur le cercle trigonométrique.

Remarque :

Comme pour le cercle, on oriente le plan de la façon suivante :

On note $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan et $k \in \mathbb{Z}$

► Si $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ alors on dit que $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est dans le sens direct.

► Si $(\vec{i}, \vec{j}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ alors on dit que $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est dans le sens direct.

Propriétés des angles orientés de vecteurs :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls et $k \in \mathbb{N}$:

$$\Rightarrow (\vec{u}, \vec{u}) = 0 + 2k\pi$$

$$\Rightarrow (\vec{u}, -\vec{u}) = (-\vec{u}, \vec{u}) = \pi + 2k\pi$$

$$\Rightarrow (\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$$

$$\Rightarrow (-\vec{u}, \vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$$

$$\Rightarrow (\vec{u}, -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \text{Si } \alpha \in \mathbb{R}^* \text{ alors } (\alpha\vec{u}, \alpha\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$$

$$\Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) + 2k\pi \text{ (Relation de Chasles)}$$