Fonctions polynômes du second degré

Première S

L'équipe des professeurs de mathématiques
Lycée Stendhal

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Année 2011-2012

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

CODE	INTITULE	Bilan		
		A	EA	NA
A0101	Trouver la forme développée			
A0102	Trouver la forme factorisée			
A0103	Trouver la forme canonique			
A0104	Déterminer les racines d'une fonction polynôme du second degré			
A0105	Déterminer les racines en se ramenant à du second degré (ex : bicarrée)			
A0106	Déterminer le signe d'une fonction polynôme du second degré			
A0107	Dresser le tableau des signes d'une expression plus complexe.			
A0108	Résoudre un problème se ramenant à une équation du second degré			
A0109	Décrire les variations d'une fonction polynôme du second degré			
A0110	Décrire la courbe d'une fonction polynôme du second degré			
A0111	Tracer correctement l'allure de la courbe d'une fonction du second degré			

Polynôme du second degré
(En première S)

Dernière mise à jour : Lundi 15 Août 2011

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1 Objectifs

L'objectif de ce chapitre est de maîtriser parfaitement les fonctions polynômes du second degré, différentes formes, racines du polynôme, signes du polynômes, tableaux des variations et courbes représentative. il faut ensuite savoir utiliser ces nouvelles connaissances dans des exercices plus complets et en ayant encore vos connaissances de seconde sur les fonctions de référence.

2 Les fonctions du second degré

2.1 Définition

Les fonctions polynômes du second degré sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{f : x \longmapsto ax^2 + bx + c \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \text{ , } b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exemples :

1. $f : x \longmapsto x^2$
2. $f : x \longmapsto 4x^2 + 5x - 7$
3. $f : x \longmapsto 4(x-2)^2 + 5$
4. $f : x \longmapsto -3(x-1)(2+x)$
5. $f : x \longmapsto (x+1)^3 - x^3$
6. $f : x \longmapsto \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{4}$

2.2 Domaine de définition

$f(x)$ existe pour toutes les valeurs de x réels donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2.3 Les différentes formes

Les fonctions polynômes du second degré peuvent avoir plusieurs formes :

1. Forme développer : $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$
2. Forme factorisée : $f : x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ (Cette forme n'existe pas toujours)
3. Forme canonique : $f : x \longmapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$

Vous devez êtres capable de passer de l'une à l'autre sans problème.

Démontrons que toutes les fonctions polynômes du second degré peuvent se mettre sous la forme canonique :
On note $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$
Comme $a \neq 0$ alors on peut factoriser par a

$$P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

De plus $x^2 + \dfrac{b}{a}x$ est le début d'une identité remarquable :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

Il reste à injecter cette relation dans $P(x)$

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} - \frac{-4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

On note $\boxed{\Delta = b^2-4ac}$ alors

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

En posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$ alors

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Réciproquement, si $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$

montrons qu'on peut le mettre sous forme développée
$f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta = a(x^2-2\alpha x+\alpha^2)+\beta = ax^2-2a\alpha x+a\alpha^2+\beta$
En posant $b = -2a\alpha$ et $c = a\alpha^2+\beta$ alors
$f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

Conclusion
Tous les polynômes du second degré peuvent se mettre sous la forme canonique, il existe donc $a \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$$

1. Exemple pour déterminer la forme développée à partir de la forme factorisée ?
   C'est simple il suffit de développer l'expression !
   $f(x) = 2(3-x)(x+2)$ déinie sur $\mathbb{R}$
   $f(x) = 2(3x+6-x^2-2x) = 6x+12-2x^2-4x = -2x^2+2x+12$ donc
   $f(x) = -2x^2+2x+12$

2. Exemple pour déterminer la forme développée à partir de la forme canonique ?
   C'est simple il suffit de développer l'expression !
   $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$ déinie sur $\mathbb{R}$
   $f(x) = 2(x^2 - 6x + 9) + 5 = 2x^2 - 12x + 18 + 5 = 2x^2 - 12x + 23$ donc
   $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$
3. Exemple pour déterminer la forme canonique à partir de la forme développée ?
   Il y a plusieurs méthodes possibles et l'on va en donner trois :
   (a) En utilisant le même méthode que lors de la dernière démonstration.
   On utilise le début d'une identité remarquable.
   $f(x) = 4x^2 - 4x + 4 = 4(x^2 - x + 1) = 4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1\right] =$
   $4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} + 1\right] = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$
   (b) En utilisant l'identification entre la forme que l'on souhaite et la forme que l'on a
   $f(x) = 4x^2 - 4x + 4$ est la forme développée.
   On souhaite la forme canonique : $f(x) = 4(x-\alpha)^2 + \beta$
   On développe la forme canonique et on identifie ave la forme factorisée.
   $f(x) = 4(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + \beta = 4x^2 - 8\alpha x + 4\alpha^2 + \beta$
   On identifie avec $f(x) = 4x^2 - 4x + 4$
   Alors $\begin{cases} -8\alpha = -4 \\ 4\alpha^2 + \beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ 4\alpha^2 + \beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ 1 + \beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 3 \end{cases}$
   donc $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$
   (c) Il suffit d'utiliser la formule : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$
   Avec $a = 4$, $b = -4$, $c = 4$ et $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(16) = -48$
   On obtient donc $\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{\Delta}{4a} = -\frac{48}{16} = 3$
   Donc $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$
4. Exemple pour déterminer la forme canonique à partir de la forme factorisée ?
   Le plus simple est de développer et de faire comme dans le paragraphe précédent.
5. Exemple pour déterminer la forme factorisée à partir de la forme canonique ?
   Ce n'est possible dans $\mathbb{R}$ que si β est positif sinon on ne peut pas factoriser dans l'ensemble des réels.
   Exemple : $f(x) = 4(x-2)^2 - 16 = 4[(x-2)^2 - 4] = 4[(x-2)^2 - 2^2] =$
   $4(x - 2 + 2)(x - 2 - 2) = 4x(x-4)$
6. Exemple pour déterminer la forme factorisée à partir de la forme développée ?

Il faut soit factoriser avec les méthodes classiques soit passer par la forme canonique, mais ce n'est pas toujours possible dans l'ensemble des réels.
Exemple 01 : $f(x) = 4x^2 - 16x = 4x(x-4)$
Exemple 02 : $f(x) = 4x^2 - 25 = (2x)^2 - (5)^2 = (2x-5)(2x+5)$
Exemple 03 :
$f(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x - 3) = 2[(x-1)^2 - 1 - 3] = 2[(x-1)^2 - 4]$
donc $f(x) = 2[(x-1)^2 - 2^2] = 2(x-1-2)(x-1+2) = 2(x-3)(x+1)$

Exercices en classe	Exercices 42 à 46 pages 30
Autonomie	Page 11 + Exercices 37 à 39 page 30

2.4 Variation et courbe représentative (Rappels de seconde)

2.4.1 Tableau des variations

Ce paragraphe a déjà été abordé en seconde donc je vais redonner les résultats.
On utilise la forme canonique :

$$f : x \longmapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Il y a deux cas à prévoir : Soit $a > 0$ ou $a < 0$

Résultats de seconde : (A connaître par coeur)

1. Si $a > 0$:

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & -\infty & & \alpha & & +\infty \\
\hline
f & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & \beta & &
\end{array}$$

   β est donc le minimum de f atteint pour $x = \alpha$

2. Si $a < 0$:

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & -\infty & & \alpha & & +\infty \\
\hline
 & & & \beta & & \\
f & & \nearrow & & \searrow &
\end{array}$$

   β est donc le maximum de f atteint pour $x = \alpha$

2.4.2 Représentations graphiques

Ce paragraphe aussi est un résultat de seconde. La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabole tournée vers le haut ou vers le bas et dont le sommet est donné par la forme canonique :

$$f(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta$$

Résultats de seconde : (A connaître par coeur)

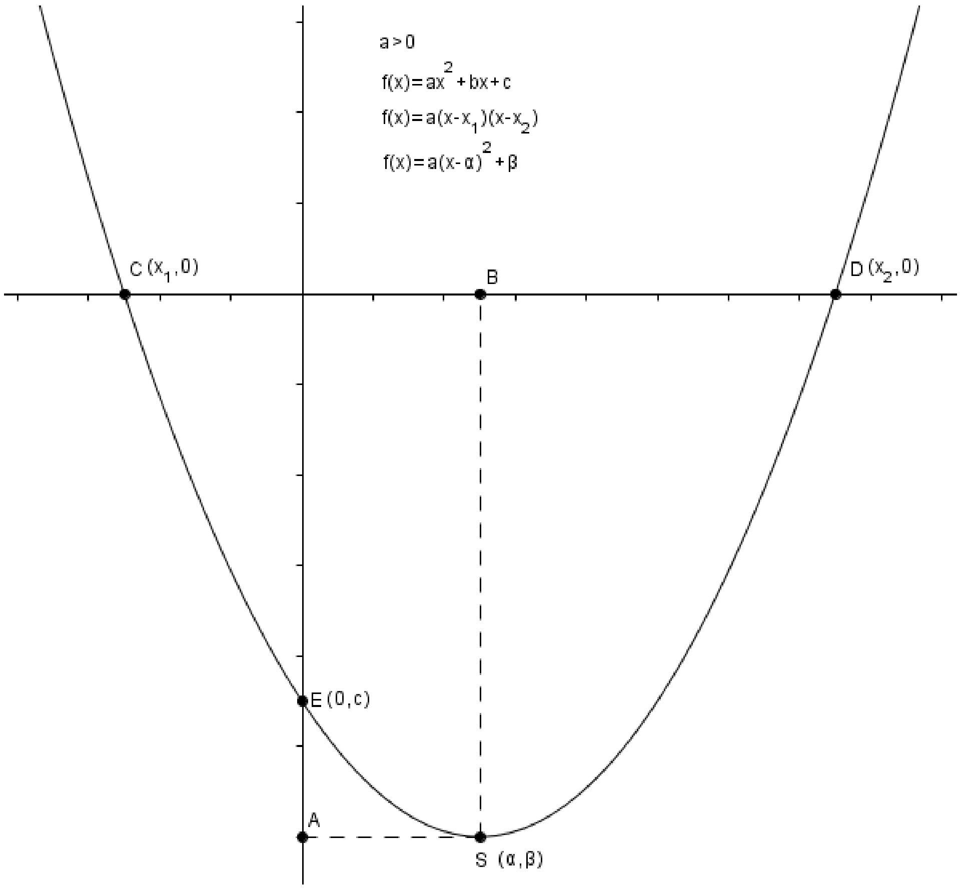
1. Si $a > 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est une parabole tournée vers le haut et de sommet

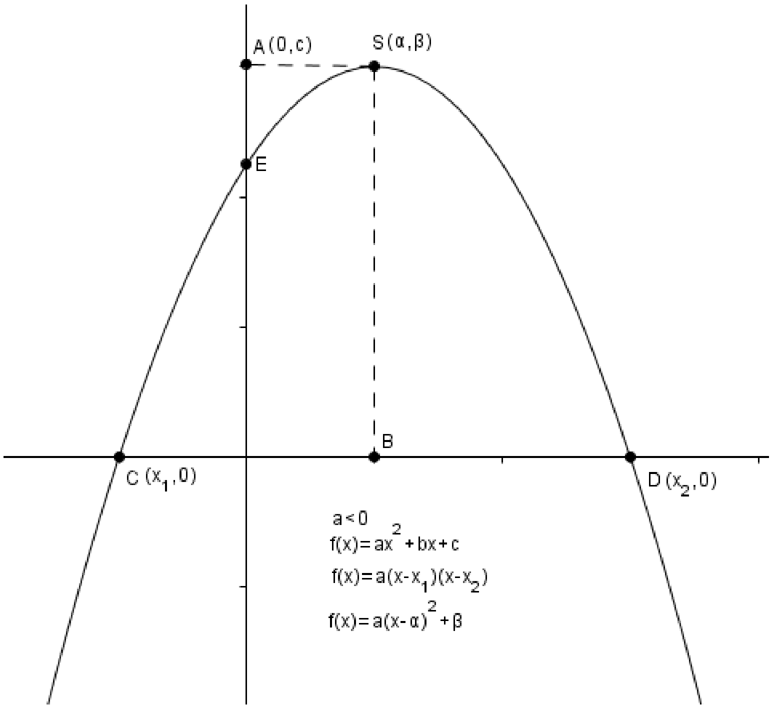
$$S(\alpha;\beta)$$

2. Si $a < 0$ alors $\mathcal{C}_f$ est une parabole tournée vers le bas et de sommet

$$S(\alpha;\beta)$$

Conclusion :





Exercices en classe	Exercices 52 à 58 pages 31-32
Exercices en classe	Exercices 73 à 77 pages 35-36
Exercices en classe	Exercices 54 à 56 pages 32 / 80 page 37
Autonomie	Page 11 + Exercices 41 page 30, 51 et 53 page 31, 57 page 32
Démonstration	Exercices 48 page 30 et 64 à 66 page 33-34

3 Equations et Inéquations du second degré

Vocabulaire :
On note **Racines du polynômes f**, les réels vérifiant :

$$f(x) = 0$$

.
Exemple :
On note $f : x \mapsto 2x^2 - 4x - 6$ une fonction polynômes du second degré.
Pour toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$,
$f(x) = \boxed{2x^2 - 4x - 6} = 2(x^2 - 2x - 3) = 2\left[(x-1)^2 - 1 - 3\right]$
$= 2\left[(x-1)^2 - 4\right] = \boxed{2(x-1)^2 - 8}$
$= 2\left[(x-1)^2 - 4\right] = 2\left[(x-1)^2 - (2)^2\right] = 2[(x-1) - 2][(x-1) + 2]$
$= 2(x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = \boxed{2(x-3)(x+1)}$

$f(x) = 0 \iff 2(x-3)(x+1) = 0 \iff x = 3$ ou $x = -1$

Les racines de $f(x)$ sont 3 et -1.
Les solutions de $f(x)=0$ sont 3 et -1.

3.1 Racines du polynômes

Les racines d'un polynômes f sont les réels x vérifiant $f(x)=0$. Ce sont les solutions de l'équations $f(x)=0$.
Approche théorique de la recherche des racines de $f(x)$:
$f(x)=ax^2+bx+c$
On factorise par a car $a\neq 0$ et donc $f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$
$x^2+\frac{b}{a}x$ est le début d'une identité remarquable :
$x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$
On peut donc remplacer $x^2+\frac{b}{a}x$ par $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$
donc
$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$
$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]$
$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$
On nomme maintenant $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$ **le discriminant du polynôme** $f(x)$.
Alors

$$\boxed{f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]}$$

Peut-on factoriser la partie $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}$?
Il y a trois cas possibles :

1. Si $\Delta=0$ c'est déja factorisé !
2. Si $\Delta>0$ alors on peut factoriser à l'aide d'une identité remarquable.
3. Si $\Delta<0$ alors on ne peut pas factoriser dans $\mathbb{R}$.

Etudions les deux cas possibles :

1. Si $\Delta=0$:
   $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}\right)$

$f(x) = 0$
$\Leftrightarrow a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b}{2a}\right) = 0$
$\Leftrightarrow x+\dfrac{b}{2a} = 0$
$\Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$
Donc la racine de $f(x)$ est l'unique réel $x = -\dfrac{b}{2a}$

2. Si $\Delta > 0$:
$f(x) = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$
$f(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$
$f(x) = a\left(x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$
$f(x) = a\left(x-\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$
$f(x) = 0$
$\Leftrightarrow x-\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ ou $x-\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Il y a donc deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Conclusion : (A connaître par coeur)
On note $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$:

1. Si $\Delta = 0$ alors il y a une seule racine $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$ et $f(x) = a(x - x_1)^2$
2. Si $\Delta > 0$ alors il y a deux racines réels distinctes $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
3. Si $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de racine réelle. Attention cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de racine du tout, mais elles ne sont pas dans $\mathbb{R}$.(Voir terminale)

Exercices en classe	Exercices 59 page 32 + exercices donnés en classe
Autonomie	Exercice 47 page 30

3.2 Tableau des signes

On note $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$. Étudions le signe de $f(x)$ suivant le signe de Δ :

1. Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

   Dans $\mathbb{R}$ le réel $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ est toujours positif donc le signe de $f(x)$ est le même que celui de a.
   Conslusion :

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

2. Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a\left(x - \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

   Si on note $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
   alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x - x_1)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x - x_2)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
a		Signe de a	|	Signe de a	|	Signe de a	
$f(x)$		Signe de a	0	Signe opposé de a	0	Signe de a	

3. Si $\Delta < 0$ alors $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

   et donc $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2}\right]$

   Dans les crochets, tous les nombres sont positifs dans $\mathbb{R}$ donc $f(x)$ est du signe de a et ne s'annule pour aucun réel.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	

Conclusion : (A connaître par coeur)
On note $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$:

1. Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

2. Si $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x-x_1)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x-x_2)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
a		Signe de a	|	Signe de a	|	Signe de a	
$f(x)$		Signe de a	0	Signe opposé de a	0	Signe de a	

3. Si $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	

Exercices en classe	Exercices 75 page 36
Autonomie	Page 11 + 72-73 page 35

3.3 Différentes équations

Nous allons appliquer maintenant nos nouvelles connaissances pour résoudre des équations plus complexes.
Nous utiliserons pour beaucoup la méthode du changement de variable.

3.3.1 Equations bicarrées

Les équations bicarrées sont de la forme : $ax^4 + bx^2 + c = 0$
On utilise le changement de variable $t = x^2$ et on remplace x^2 par t dans l'équation :
On obtient alors l'équation : $at^2 + bt + c = 0$!! Oh, une équation connue ...
Il suffit de trouver les racines de $at^2 + bt + c$ pour trouver les valeurs de t puis ensuite à l'aide de l'équation $x^2 = t$ d'obtenir les valeurs de x.

Exemple :
Résoudre l'équation : $2x^4 + 2x^2 - 24 = 0$ ou trouver les racines de $2x^4 + 2x^2 - 24$
On pose le changement de variable $x^2 = t$
On obtient donc l'équation : $2t^2 + 2t - 24 = 0$
Calculons le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(2)(-24) = 4 + 192 = 196 = 14^2$
$\Delta > 0$ donc d'après le cours il y a deux racines réelles disctinctes :

$$t_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+14}{4} = 3$$

et

$$t_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-14}{4} = -4$$

Il reste donc à résoudre les deux équations :

1. $x_1^2 = t_1 \Leftrightarrow x_1^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$
2. $x_2^2 = t_2 \Leftrightarrow x_2^2 = -4$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

Conclusion : les solutions sont $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

3.3.2 Autres équations

Exemple 01 :

On souhaite résoudre l'équation : $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x}-5=0$ sur $\mathbb{R}^*$ pour que $x\neq 0$.

On pose le changement de variable $\dfrac{1}{x}=t$

On obtient donc l'équation : $t^2+4t-5=0$

Calculons le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4(1)(-5)=16+20=36=6^2$

$\Delta>0$ donc d'après le cours il y a deux racines réelles disctinctes :

$t_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4+6}{2}=1$

et

$t_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4-6}{2}=-5$

Il reste donc à résoudre les deux équations :

1. $\dfrac{1}{x_1}=t_1\Leftrightarrow\dfrac{1}{x_1}=1\Leftrightarrow x_1=1$
2. $\dfrac{1}{x_2}=t_2\Leftrightarrow\dfrac{1}{x_2}=-5\Leftrightarrow x_2=-\dfrac{1}{5}$

Conclusion : les solutions sont $S=\left\{-\dfrac{1}{5};1\right\}$

Exemple 02 :

On souhaite résoudre l'équation : $t-\sqrt{t}-12=0$ sur $\mathbb{R}^+$ pour que $x\geq 0$.

On pose le changement de variable $\sqrt{t}=x$

On obtient donc l'équation : $x^2-x-12=0$

Calculons le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(1)(-12)=49=7^2$

$\Delta>0$ donc d'après le cours il y a deux racines réelles disctinctes :

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1+7}{2}=4$

et

$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1-7}{2}=-3$

Il reste donc à résoudre les deux équations :

1. $\sqrt{t_1}=x_1\Leftrightarrow\sqrt{t_1}=4\Leftrightarrow t_1=16$
2. $\sqrt{t_2}=x_2\Leftrightarrow\sqrt{t_2}=-3$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Conclusion : les solutions sont $S=\{16\}$

Exemple 03 :

On souhaite résoudre l'équation : $2Cos^2(\theta)-Cos(\theta)-1=0$ sur $\mathbb{R}$.

On pose le changement de variable $Cos(\theta)=x$

On obtient donc l'équation : $2x^2-x-1=0$

Calculons le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(2)(-1)=9=3^2$

$\Delta>0$ donc d'après le cours il y a deux racines réelles disctinctes :

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+3}{4}=\dfrac{1}{2}$

et
$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-3}{4} = -1$
Il reste donc à résoudre les deux équations :

1. $Cos(\theta_1) = x_1 \Leftrightarrow Cos(\theta_1) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \theta_1 = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $\theta_1 = -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$
2. $Cos(\theta_1) = x_2 \Leftrightarrow Cos(\theta_2) = -1 \Leftrightarrow \theta_2 = \pi[2\pi]$

Conclusion : les solutions sont $S = \left\{-\dfrac{\pi}{3}[2\pi]; \dfrac{\pi}{3}[2\pi]; \pi[2\pi]\right\}$

FIN DU CHAPITRE

A compléter	1 et 3 à 8 page 28
Vrai ou faux ?	Tout page 28
QCM	QCM 26 à 33 page 29
Problèmes	Pb 81-82-83 page 37-38
Vrai ou Faux	117-118-120-121-124 pages 44-45