Les fonctions de référence

Première S

L'équipe des professeurs de mathématiques
Lycée Stendhal

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Année 2011-2012

Liste des savoirs et savoir-faire du chapitre :

CODE	INTITULE	Bilan		
		A	EA	NA
A0201	Connaître les variations des fonctions affines			
A0202	Connaître les variations des fonctions du second degré			
A0203	Connaître les variations des fonctions homographiques			
A0204	Connaître les variations de la fonction racine carrée			
A0205	Connaître les variations de la fonction valeur absolue			
A0206	Décrire et tracer l'allure des courbes des fonctions précédentes			
A0207	Etudier la position relative des courbes des fonctions précédentes			
A0208	Etudier l'intersection des courbes avec les axes du repère.			
A0209	Etudier les variations et la courbe de u(x)+k			
A0210	Etudier les variations et la courbe de k*u(x)			
A0211	Etudier les variations et la courbe de sqrt(u(x))			
A0212	Etudier les variations et la courbe de 1/u(x)			

Les Fonctions de Référence

(En première S)

Dernière mise à jour : Vendredi 28 Octobre 2011

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1 Objectifs

L'objectif de ce chapitre est de connaître parfaitement les fonctions de référence (fonctions affines, fonction carré, fonction racine carrée et fonction valeur absolue) et de savoir utiliser ces connaissances dans des exercices pour étudier des variations de façon simples et rapide.

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2 Les fonctions de référence

2.1 Les fonctions affines

2.1.1 Définition

Les fonctions affines sont les fonctions de la forme : $\boxed{f : x \longmapsto ax + b}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

1. Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors f est **une fonction affine**.
2. Si $a \neq 0$ et $b = 0$ alors f est **une fonction affine linéaire**.
3. Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors f est **une fonction affine constante**.

Exemples :

1. $f : x \longmapsto 2x + 3$ est une fonction affine.
2. $f : x \longmapsto 3 - 2x$ est une fonction affine.
3. $f : x \longmapsto 4x$ est une fonction affine linéaire.
4. $f : x \longmapsto 5$ est une fonction affine constante.

2.1.2 Ensemble de définition

$$f : x \longmapsto ax + b \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

$f(x)$ existe pour toutes les valeurs réelles donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$
Toutes les fonctions affines sont définies sur $\mathbb{R}$.

2.1.3 Signes

$$f : x \longmapsto ax + b \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

▷ **Si** $a = 0$ $f(x)$ est donc du signe de b

▷ **Si** $a > 0$ Etude du signe de $f(x)$

1. $f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow ax + b \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -\dfrac{b}{a}$
2. $f(x) \leq 0 \Longleftrightarrow ax + b \leq 0 \Longleftrightarrow x \leq -\dfrac{b}{a}$

▷ **Si** $a < 0$ Etude du signe de $f(x)$

1. $f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow ax + b \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq -\dfrac{b}{a}$
2. $f(x) \leq 0 \Longleftrightarrow ax + b \leq 0 \Longleftrightarrow x \geq -\dfrac{b}{a}$

Conclusion :

▷ **Si** $a = 0$ Tableau des signes :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de b	

▷ **Si** $a \neq 0$ Tableau des signes :

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de $-a$	0	Signe de a	

2.1.4 Variations

$$f : x \longmapsto ax + b \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

On note x_1 et x_2 deux nombres réels tels que :

$$x_1 < x_2$$

Comparons $f(x_1)$ et $f(x_2)$:
$f(x_1) - f(x_2) = [ax_1 + b] - [ax_2 + b] = ax_1 + b - ax_2 - b = a(x_1 - x_2)$

▷ **Si** $a > 0$ Comme $x_1 < x_2$ alors $x_1 - x_2 < 0$ donc $f(x_1) - f(x_2) < 0$ donc
$\boxed{f(x_1) < f(x_2)}$
Or $x_1 < x_2$ donc les antécédents et les images sont dans le même ordre donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

▷ **Si** $a < 0$ Comme $x_1 < x_2$ alors $x_1 - x_2 < 0$ donc $f(x_1) - f(x_2) > 0$ donc
$\boxed{f(x_1) > f(x_2)}$
Or $x_1 < x_2$ donc les antécédents et les images sont dans l'ordre contraire donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Conclusion :

▷ **Si** $a > 0$ Tableau des variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
f		$\nearrow$	

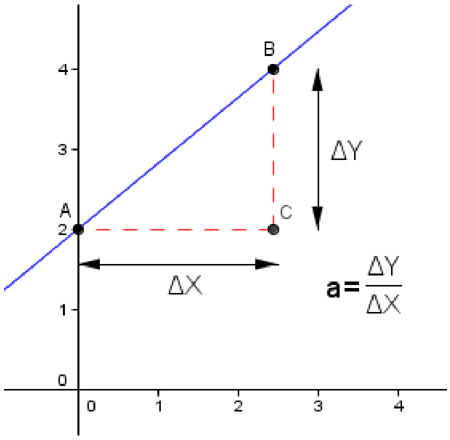
▷ **Si** $a < 0$ Tableau des variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
f		$\searrow$	

2.1.5 Courbe représentative

$$f : x \longmapsto ax + b \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction affine est une droite passant par le point $(o; b)$ et de pente a.



2.2 La fonction carré

2.2.1 Définition

La fonction carré est :

$$\boxed{f : x \longmapsto x^2}$$

Rappels :

1. $f : x \longmapsto x^2$ (Forme développée)
2. $f : x \longmapsto 1(x-0)^2 + 0$ (Forme canonique)
3. $f : x \longmapsto 1(x-0)(x-0)$ (Forme factorisée)

L'étude de cette fonction a été faite dans le chapitre 01 donc nous allons juste écrire les conclusions sans les redémontrer.

2.2.2 Ensemble de définition

$$\boxed{f : x \longmapsto x^2}$$

$f(x)$ existe pour toutes les valeurs réelles de x donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2.2.3 Signes

Tableau des signes de la fonction carré :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

2.2.4 Variations

$$\boxed{f : x \longmapsto x^2}$$

La forme canonique est $f(x) = 1(x-0)^2 + 0$
Tableau des variations :

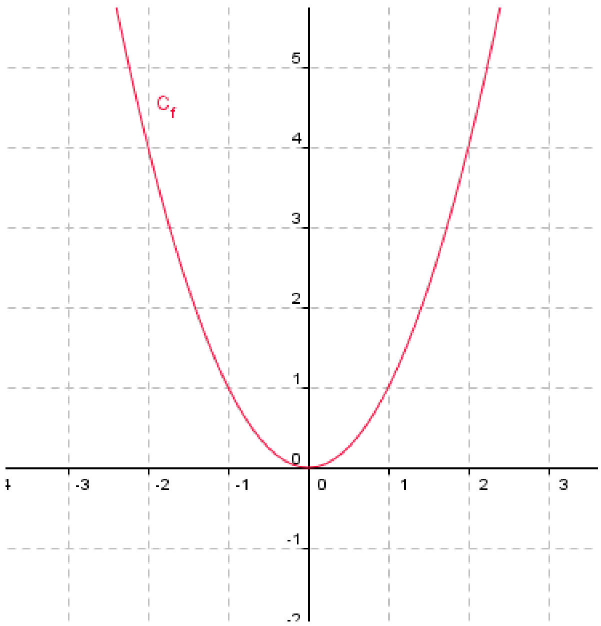
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

0 est donc le minimum de f atteint pour $x = 0$

2.2.5 Courbe représentative

$$\boxed{f : x \longmapsto x^2}$$

$\mathcal{C}_f$ est une parabole dont les branches sont tournées vers le haut, de sommet $S\,(0;0)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 0$



2.3 La fonction inverse

2.3.1 Définition

La fonction inverse est la fonction $\boxed{f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}}$

2.3.2 Ensemble de définition

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$$

$f(x)$ existe $\iff x \neq 0$ donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ ou $\boxed{D_f = \mathbb{R}^*}$

2.3.3 Signes

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$$

▷ $f(x) > 0 \iff x > 0$

▷ $f(x) < 0 \iff x < 0$

Donc le tableau des signes de la fonction inverse est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	

2.3.4 Variations

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$$

▷ Etudions les variations de f sur $]-\infty;0[$

On note a et b deux nombres réels tels que :

$$\boxed{a < b < 0}$$

Comparons $f(a)$ et $f(b)$:

$f(a) - f(b) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b}{ab} - \dfrac{a}{ab} = \dfrac{b-a}{ab}$

◇ On sait que $a < b$ donc $b - a > 0$ (Positif)

◇ On sait que $a < 0$ et $b < 0$ donc $ab > 0$ (Positif)

Donc $f(a) - f(b) > 0 \iff \boxed{f(a) > f(b)}$

Conslusion : Les antécendents et les images sont dans l'ordre contraire donc f est décroissante sur $]-\infty;0[$.

▷ Etudions les variations de f sur $]0;+\infty[$

On note a et b deux nombres réels tels que :

$$\boxed{0 < a < b}$$

Comparons $f(a)$ et $f(b)$:

$f(a) - f(b) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b}{ab} - \dfrac{a}{ab} = \dfrac{b-a}{ab}$

◇ On sait que $a < b$ donc $b - a > 0$ (Positif)

◇ On sait que $a > 0$ et $b > 0$ donc $ab > 0$ (Positif)

Donc $f(a) - f(b) > 0 \iff \boxed{f(a) > f(b)}$

Conslusion : Les antécendents et les images sont dans l'ordre contraire donc f est décroissante sur $]0;+\infty[$.

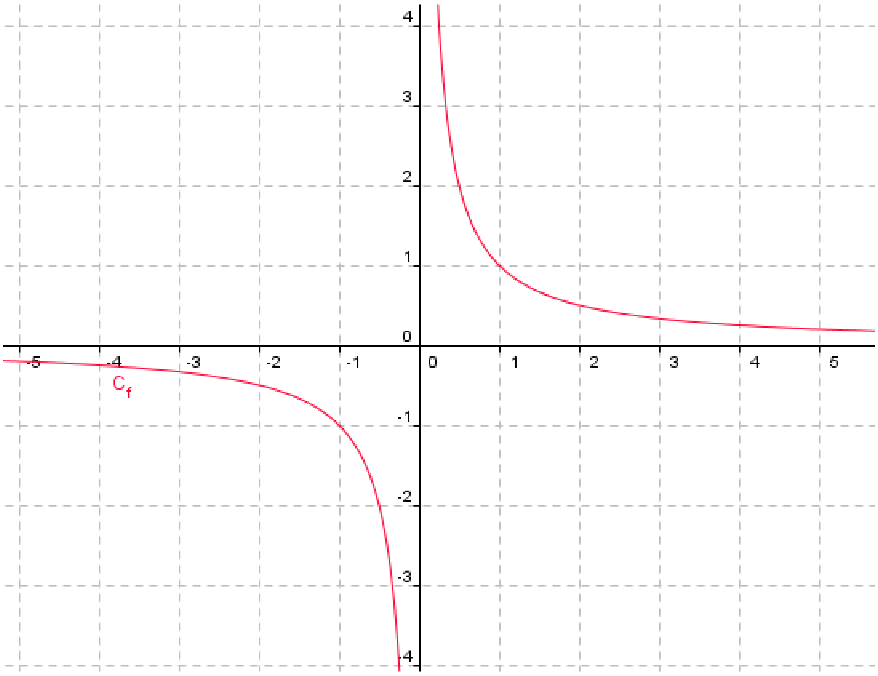
Donc le tableau des variations de la fonction inverse est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

2.3.5 Courbe représentative

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$$

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est une hyperbole de centre de symétrie $O(0;0)$



2.4 La fonction racine carrée

2.4.1 Définition

La fonction racine carrée est $\boxed{f : x \longmapsto \sqrt{x}}$ où $\sqrt{x}$ est l'unique réel positif vérifiant $(\sqrt{x})^2 = x$.

2.4.2 Ensemble de définition

$$f : x \longmapsto \sqrt{x}$$

$f(x)$ existe $\Longleftrightarrow x \geq 0$ donc $\boxed{D_f = [0;+\infty[}$

2.4.3 Signes

$$f : x \longmapsto \sqrt{x}.$$

$f(x)$ est toujours positif pour tout $x \in [0; +\infty[$
Tableau des signes de la fonction racine carrée :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+$

2.4.4 Variations

$$f : x \longmapsto \sqrt{x}.$$

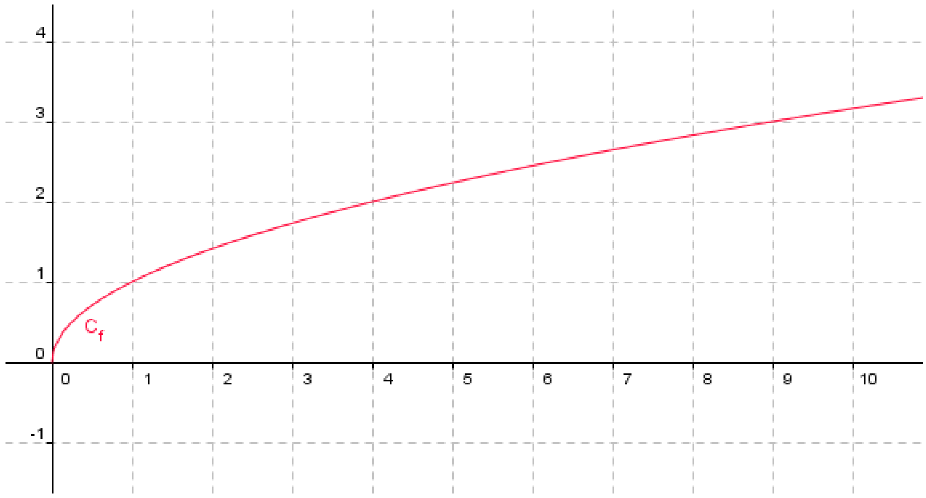
Etudions les variations de f sur $[0; +\infty[$
On nomme a et b deux réels tel que :

$$\boxed{0 \leq a < b}$$

Comparons $f(a)$ et $f(b)$
$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \dfrac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$
$\diamond$ On sait que $a < b$ donc $a - b < 0$ (Négatif)
$\diamond$ On sait que $\sqrt{a} > 0$ et $\sqrt{b} > 0$ donc par somme $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$ (Positif)
Conclusion : $f(a) - f(b) < 0 \Longleftrightarrow \boxed{f(a) < f(b)}$
Les antécédents et les images sont dans le même ordre donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$
Tableau des variations :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

2.4.5 Courbe représentative



2.5 La fonction valeur absolue

2.5.1 Définition

La valeur absolue d'un nombre réel x est **la distance de** x **à** 0 donc :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Exemples :
$|4,12| = 4,12 \qquad |-4,12| = 4,12 \qquad |2-\pi| = -(2-\pi) = \pi - 2$
Quelques propriétés :

P_1 **:** Pour tout x réel, $|-x| = |x|$

P_2 **:** Pour tou x réel $|x| = 0 \iff x = 0$

P_3 **:** Pour tout x réel $\sqrt{x^2} = |x|$

P_4 **:** Pour tout x réel $|x| \geq 0$

La fonction valeur absolue est la fonction $\boxed{f : x \longmapsto |x|}$

Exercices corrigés : 36 page 29

2.5.2 Ensemble de définition

$$f : x \longmapsto |x|$$

$f(x)$ existe pour tous les valeur de x réelle donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2.5.3 Signes

$$f : x \longmapsto |x|$$

D'après la propriété P_4, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$
Tableau des signes :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

2.5.4 Variations

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

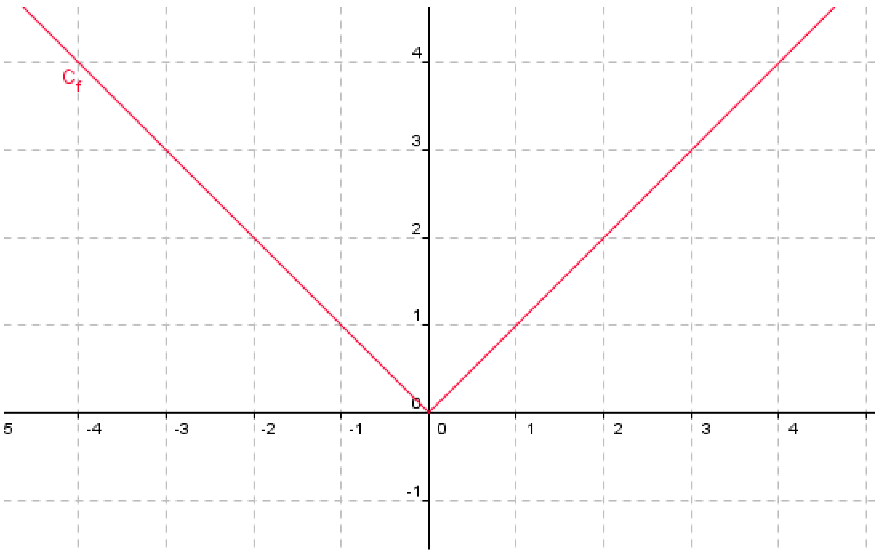
donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$
Tableau des variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			0		

2.5.5 Courbe représentative

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

La courbe représentative de f est constituée de deux demi-droites l'une d'équation $y = -x$ et l'autre $y = x$



Exemples :

1. Ecrire sans valeur absolue, puis représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |2-x|$
2. Ecrire sans valeur absolue, puis représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x-3|$
3. Ecrire sans valeur absolue, puis représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |2-x| + |x-3|$
4. Ecrire sans valeur absolue, puis représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |2-x| - |x-3|$

Exercices corrigés : 2ième page 15 Exercices non corrigés : 87 à 90 puis 92 et 94 page 38

3 Position relative entre les courbes usuelles

On considère les courbes représentatives des fonctions f, g et h définies sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x \qquad g(x) = x^2 \quad \text{et} \quad h(x) = \sqrt{x}$$

et on s'intéresse à la position relatives de ces courbes.

1. **Position relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$**
Pour tout $x \geq 0$, $g(x) - f(x) = x^2 - x = x(x-1)$ polynôme du second degré de racines $x = 0$ et $x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$g(x) - f(x)$	0	$-$	0	$+$	
Position relative	|	$\mathcal{C}_f$ au dessus de $\mathcal{C}_g$	|	$\mathcal{C}_f$ au dessous de $\mathcal{C}_g$	

2. **Position relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$**
Pour tout $x \geq 0$, $f(x) - h(x) = x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$
Pout tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$
De plus $\sqrt{x} - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow \sqrt{x} \geq 1$
Or g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc $g(\sqrt{x}) \geq g(1) \Longleftrightarrow x \geq 1$

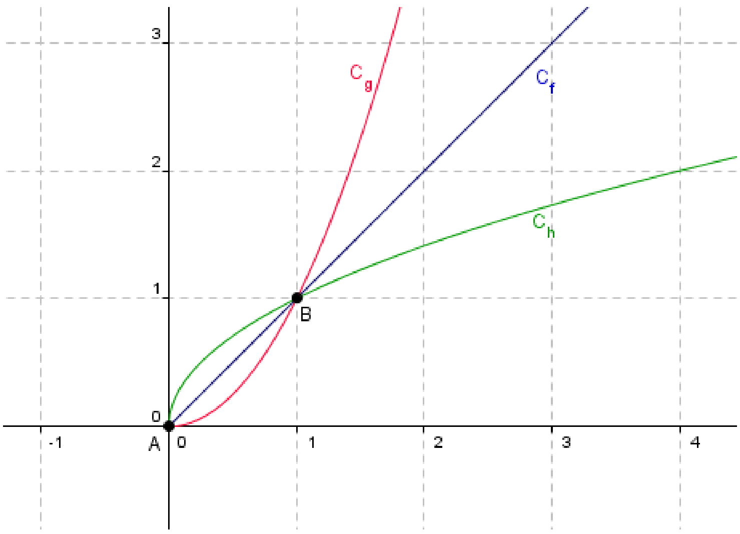
x	0		1		$+\infty$
$f(x) - h(x)$	0	$-$	0	$+$	
Position relative	|	$\mathcal{C}_f$ au dessous de $\mathcal{C}_h$	|	$\mathcal{C}_f$ au dessus de $\mathcal{C}_h$	

3. Propriétés :

P_5 **:** $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ ont deux points communs : $A(0;0)$ et $B(1;1)$

P_6 **:** Pour tout $x \in [0;1]$, $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$

P_7 **:** Pour tout $x \in [1;+\infty[$, $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$



Exemples :

1. Sans calculatrice, ordonner les nombres : $\dfrac{\sqrt{\pi}}{3}$, $2\sqrt{\pi}$, $16\pi^2$, $\dfrac{\pi}{9}$, 4π et $\dfrac{\pi^2}{81}$
2. **Exercices corrigés : 1er page 17 et 11 pages 28**

4 Variations de fonction

4.1 Fonctions f et $f+k$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et k un nombre réel.
On note $f+k : x \longmapsto f(x)+k$
Y a-t-il un lien entre les vairations de f et de $f+k$?

◇ Si f est croissant sur I
Pour tous réels a et b de I tels que $a < b$
alors $f(a) \leq f(b)$ donc $f(a)+k \leq f(b)+k$ donc $f+k$ est croissante sur I

◇ Si f est décroissant sur I
Pour tous réels a et b de I tels que $a < b$
alors $f(a) \geq f(b)$ donc $f(a)+k \geq f(b)+k$ donc $f+k$ est décroissante sur I

◇ Conclusion :
k étant un réel, f une fonction définie et monotone sur un intervalle I, alors les fonctions f et $f+k$ ont les mêmes variations sur I.

4.2 Fonctions f et λf

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et λ un nombre réel non nul.
On note $\lambda f : x \longmapsto \lambda \times f(x)$
Y a-t-il un lien entre les vairations de f et de λf ?

◇ Si f est croissant sur I
Pour tous réels a et b de I tels que $a < b$
alors $f(a) \leq f(b)$

1. Si $\lambda > 0$ alors $\lambda f(a) \leq \lambda f(b)$ donc λf est croissante sur I.
2. Si $\lambda < 0$ alors $\lambda f(a) \geq \lambda f(b)$ donc λf est décroissante sur I.

◇ Si f est décroissant sur I
Pour tous réels a et b de I tels que $a < b$
alors $f(a) \geq f(b)$

1. Si $\lambda > 0$ alors $\lambda f(a) \geq \lambda f(b)$ donc λf est décroissante sur I.
2. Si $\lambda < 0$ alors $\lambda f(a) \leq \lambda f(b)$ donc λf est croissante sur I.

◇ Conclusion :
f est une fonction définie et monotone sur un intervalle I

1. Si $\lambda > 0$ les fonctions f et λf ont les mêmes variations sur I.
2. Si $\lambda < 0$ les fonctions f et λf ont des variations contraires sur I.

Exemples :

1. Déterminer les variations des fonctions $f : x \longmapsto -3(x^2 + 2)$
2. Déterminer les variations des fonctions $f : x \longmapsto -5 + 2\sqrt{x}$
3. Déterminer les variations des fonctions $f : x \longmapsto 3 - 4|x|$

Exercices corrigés : 9-10-12 page 28 et 84 page 38 Exercices non corrigés : Déterminer les variations de f_2 et f_4 du 97

4.3 Fonctions f et $\sqrt{f}$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si pour tout x de I, $f(x) \geq 0$ alors $\sqrt{f(x)}$ a un sens.
Y a-t-il un lien entre les variations de f et de $\sqrt{f}$?

◇ Supposons f croissante dur I
Pour tous réels a et b de I tels que $a < b$
alors $f(a) \leq f(b)$
Or la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont positifs donc $\sqrt{f(a)} \leq \sqrt{f(b)}$ donc $\sqrt{f}$ est croissante sur I

◇ Supposons f décroissante dur I

Pour tous réels a et b de I tels que $a < b$

alors $f(a) \geq f(b)$

Or la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont positifs donc $\sqrt{f(a)} \geq \sqrt{f(b)}$ donc $\sqrt{f}$ est décroissante sur I

◇ Conclusion :

Si f est une fonction définie, **positive** et monotone sur un intervalle I, alors les fonctions f et $\sqrt{f}$ ont les mêmes variations sur I

Exemples :

1. Déterminer l'ensemble de définition et le sens de variations de $f : x \longmapsto \sqrt{2x-8}$
2. Déterminer l'ensemble de définition et le sens de variations de $f : x \longmapsto \sqrt{2x^2-2x-3}$

Exercices non corrigés : 99 page 39

4.4 Fonctions f et $\frac{1}{f}$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si pour tout x de I, $f(x) \neq 0$ alors $\frac{1}{f(x)}$ a un sens.

Y a-t-il un lien entre les variations de f et de $\frac{1}{f}$?

◇ Supposons f croissante dur I

Pour tous réels a et b de I tels que $a < b$

alors $f(a) \leq f(b)$

Or la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$ et sur $]-\infty; 0[$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont strictement positifs (ou strictement négatifs) donc $\frac{1}{f(a)} \geq \frac{1}{f(b)}$ donc $\frac{1}{f}$ est décroissante sur I

◇ Supposons f décroissante dur I

Pour tous réels a et b de I tels que $a < b$

alors $f(a) \geq f(b)$

Or la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$ et sur $]-\infty; 0[$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont strictement positifs (ou strictement négatifs) donc $\frac{1}{f(a)} \leq \frac{1}{f(b)}$ donc $\frac{1}{f}$ est croissante sur I

◇ Conclusion :

Si f est une fonction définie, **strictement positive (ou strictement négative)** et monotone sur un intervalle I, alors les fonctions f et $\frac{1}{f}$ ont des variations contraires sur I

Exemples :

1. Déterminer l'ensemble de définition et le sens de variations de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x+3}$
2. Déterminer l'ensemble de définition et le sens de variations de $f : x \longmapsto \dfrac{2x-3}{x-1}$

Exercices corrigés : 3ième page 17 et 4 page 25 Exercices non corrigés : 85-86 page 38 et 103 page 41