Devoir commun de première S

Mathématiques

<u>Le soin</u>, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

<u>La calculatrice n'est pas autorisée</u> pour ce devoir

Exercice 1 : Un petit peu d'analyse !

1. Factoriser les expressions suivantes :
   (a) $f(x) = 4x^2 - 5$
   (b) $g(x) = 3x^2 + 5x - 2$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 = 6 - x^2$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
   (a) $\dfrac{4x-9}{x} > \dfrac{8x+7}{4-x}$
   (b) $\dfrac{3x^2-5x+3}{-4x^2+3x-1} \leq 0$
4. Déterminer les limites ci-dessous. (On rédigera correctement la démarche)
   (a) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2x-2}{3-2x+x^3}$
   (b) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{x-5}{1-x^2}$
   (c) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{x-5}{1-x^2}$
5. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions ci-dessous. (On rédigera correctement la démarche en donnant le domaine de dérivabilité)
   (a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x}$
   (b) $g(x) = 3 - 2\sqrt{3-x}$
   (c) $h(x) = 3x - \dfrac{5}{x}$
6. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ (question précédente) au point d'abscisse $a = 1$
7. Démontrer que la droite d'équation $y = 3x$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction h de la question précédente.
8. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre la courbe représentative de la fonction g précédente et l'axe des abscisses.

9. Détermine les variations des suites ci-dessous :

   (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 4n$

   (b) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{5^{n+1}}{2 \times 3^{2n}}$

10. Déterminer la limite des suites ci-dessous.

    (a) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{2^n}{3^n}\right)$

    (b) $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \dfrac{1}{n}\sin n$

11. Les suites ci-dessous sont elles arithmétiques ou géométriques ? (Précisez la raison et le premier terme)

    (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3 \times 5^n}{2^{n+1}}$

    (b) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 6 - 5(n+3)$

12. On note u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
    On note v la suite définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3$

    (a) Démontrer que v est géométrique.

    (b) Exprimer v_n en fonction de n.

    (c) Exprimer u_n en fonction de n.

13. Deux petites sommes :

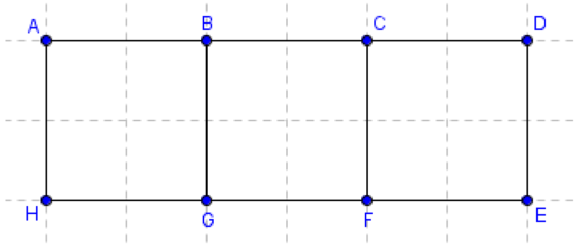
    (a) Exprimer la valeur exacte, sans chercher à la réduire, de $S_n = 1 + 3 + 9 + 27 \ldots\ldots 3^{16}$

    (b) Calculer la valeur exacte de $R_n = 5 + 55 + 105 + \ldots\ldots 305$

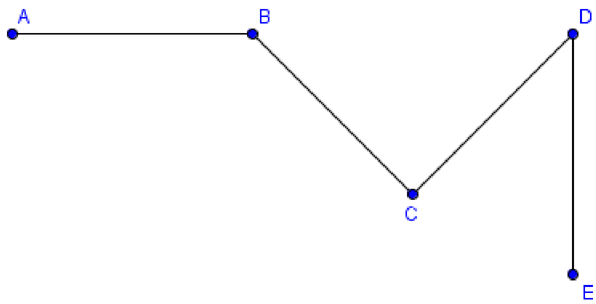
Exercice 2 : Un petit peu de géométrie !

Dans les questions 4) à 8) on se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Exprimer, en fonction de $\sin x$ et $\cos x$: $A = \cos(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(x - 3\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
2. On donne $\cos x = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $x \in]-\pi; 0[$
   (a) Déterminer $\sin x$
   (b) Exprimer $\tan x$ sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des réels.
3. Soit $M(-2; -2\sqrt{3})$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   Déterminer les coordonnées polaires de M dans $(O, \vec{i})$
4. $A(-4; 2)$ et $B(2; -2)$
   Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$.
5. Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$
6. Déterminer une équation de la droite passant par $A(1; -5)$ et de vecteur normal (orthogonal) $\vec{n}(7; -1)$
7. Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $I(1; 1)$ et de rayon 2 avec le cercle $\mathcal{C}_2$ d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 3$
8. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal (orthogonal) à $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont les points définis dans la question 7.
9. ABC est un triangle tel que $AB = 7$, $BC = 5$ et $AC = 8$. Calculer la mesure de $\widehat{ACB}$
10. $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 2$, $AD = 3$ et $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{6}$.
    Calculer la longueur de ses diagonales.
11. $ABGH$, $BCFG$ et $CDEF$ sont des carrés de côté $a \in]0; +\infty[$

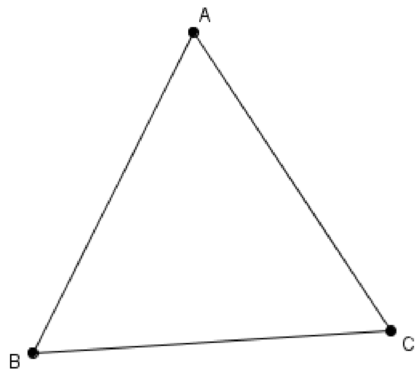


    Calculer $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HD}$ en fonction de a. En déduire la valeur axacte de $\cos(\widehat{BHD})$.
12. On sait que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\dfrac{4\pi}{3}[2\pi]$, $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) = \dfrac{19\pi}{3}[2\pi]$.



    Les droites (AB) et (DE) sont-elles perpendiculaires ?

13. ABC est un triangle équilatéral :



   (a) Construire sur la figure ci-dessus K le barycentre de $\{(A,1);(B,2)\}$
   (b) Construire sur la figure ci-dessus G le barycentre de $\{(A,1)(B,2)(C,4)\}$
   (c) Sachant que $4\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{AJ}$, exprimer J comme barycentre de A et C avec les bons coefficients.
   (d) Sachant que $\overrightarrow{BI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, exprimer I comme barycentre de B et C avec les bons coefficients.
   (e) Montrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.
14. Soit G le barycentre de $\{(A,1)(B,-2)(C,3)\}$
   Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $||\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|| = 4$

Dernier DS mais ce n'est pas encore les vacances .....