La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.
LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISEE POUR CE DS

Exercice 1 (8 pts) :

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{2}\left(n + \dfrac{4}{n}\right)$
et
$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(w_n + \dfrac{4}{w_n}\right)$ avec $w_0 = \dfrac{1}{2}$

Partie 1 Etude de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{4}{x}\right)$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$ puis dresser le tableau des variations de f sur $[0;+\infty[$.

Partie 2 Etude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. Construire (**en rouge**) sur l'axe des abscisses du repère au verso, les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
2. Etudier le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Partie 3 Etude de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Construire (**en bleu**) sur l'axe des abscisses du repère au verso, les 4 premiers termes de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Si la suite est convergente, déterminer algébriquement sa limite ?

Exercice 2 (5 pts) : Etudier les variations des suites suivantes :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6n - n^2 - 5$
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{5n}{2^{n+1}}$
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + (-1)^{2n+1}}{n}$

Exercice 3 (5 pts) : Etudier la convergence des suites suivantes :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2^n - 5^n}{7^n}$
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\sin(n) + 1}{n}$
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1 + 5^n}{3 - 5^n}$

Exercice 4 (2 pts) : Montrer que les suites ci-dessous sont bornées :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4}{2n+1}$
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sin n + \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice BONUS (2 pts) : Démontrer qu'une suite convergente est bornée.

Exercice for the giga style (2 pts) : Démontrer que si une suite de réels converge alors sa limite est unique. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser l'aide ci-dessous.
Aide : Pour tout réels a et b alors $|a + b| \leq |a| + |b|$

NOM : Prénom :

Repère pour l'exercice 01 :