Exercice 1 (4 pts) : On note $k \in \mathbb{Z}$ dans tout l'exercice.

1. On note $A[r,\theta]$ les coordonnées polaires de A dans $(O, \overrightarrow{i})$
   $r = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
   $\cos\theta = \dfrac{x_A}{r} = -\dfrac{3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   $\sin\theta = \dfrac{y_A}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$ donc $\theta = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$
   Les coordonnées polaires de A dans $(O, \overrightarrow{i})$ sont $\boxed{A\left[2\sqrt{3}; \dfrac{5\pi}{6}\right]}$
2. $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{i}) + (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OB}) = -\dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc $\boxed{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi}$
3. $(-\overrightarrow{j}, \overrightarrow{OA}) = (-\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}) + (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$
   Les coordonnées polaires de A dans $(O, -\overrightarrow{j})$ sont $\boxed{A\left[2\sqrt{3}; -\dfrac{2\pi}{6}\right]}$
4. On note $B(x_B; y_B)$ les coordonnées cartésiennes de B dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:
   $x_B = r_B \times \cos(\theta_B) = 2\sqrt{3} \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} \times \dfrac{1}{2} = \sqrt{3}$
   $y_B = r_B \times \sin(\theta_B) = 2\sqrt{3} \times \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$
   donc les coordonnées cartésiennes de B dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont $\boxed{B(\sqrt{3}; 3)}$
5. Il faut trouver la longueur BA puis l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{BA})$
   $BA = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-3-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}-3)^2} = 2\sqrt{6}$
   L'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB})$ est l'angle que fait la droite (AB) avec l'axe des abscisses.
   D'après le cours de seconde $\tan(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{-3-\sqrt{3}} = -2+\sqrt{3}$
   A l'aide de la calculatrice on obtient : $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB}) = -\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi$
   $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{BA}) = \pi + (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB}) = \pi - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi$
   Les coordonnées polaires de A dans $(B, \overrightarrow{i})$ sont $\boxed{A\left[2\sqrt{6}; \dfrac{11\pi}{12}\right]}$

Exercice 2 (3 pts) : (Exercice 32/33/34 p373 de votre livre)

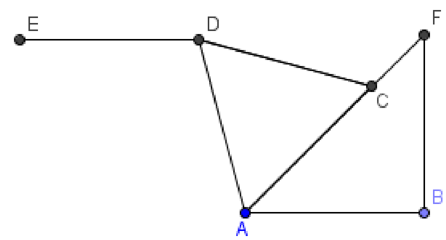
1. $A = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = \boxed{-\cos x}$
2. $B = \cos\left(x - \dfrac{9\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right) = \boxed{-\sin x}$
3. $C = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \boxed{-\dfrac{1}{\tan x}}$

4. $D = \cos(-\pi - x) + \sin(x - \pi) + \sin(4\pi - x) = \boxed{-\cos x - 2\sin x}$

Exercice 3 (5 pts) : $(k \in \mathbb{Z})$

1. ➠ $\dfrac{17\pi}{3} = \dfrac{18\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = 6\pi - \dfrac{\pi}{3}$ donc la mesure principale de $\dfrac{17\pi}{3}$ est $\boxed{-\dfrac{\pi}{3}}$

   ➠ $-\dfrac{13\pi}{12} = \dfrac{11\pi}{12} - \dfrac{24\pi}{12} = \dfrac{11\pi}{12} - 2\pi$ donc la mesure prinicpale de $-\dfrac{13\pi}{12}$ est $\boxed{\dfrac{11\pi}{12}}$.
2. Voir la figure ci-dessous



3. L'ensemble des points M est l'ensemble des points de $[AB]$ sans A et B.
4. Les coordonnées polaires de C dans $(A; \overrightarrow{AB})$ sont $\left[1; \dfrac{\pi}{4}\right]$
5. On note $k \in \mathbb{Z}$
   $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE})$
   $= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}) + 2k\pi$
   $= \dfrac{\pi}{4} + \pi + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) + \pi + (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) + 2k\pi$
   $= \dfrac{\pi}{4} + \pi - \dfrac{\pi}{3} + \pi - \dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi = \pi + 2k\pi$
   donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc (AB) et (ED) sont parallèles.
6. Voir figure.
7. On note $k \in \mathbb{Z}$
   $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF})$
   $= (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BF}) + 2k\pi$
   $= \pi + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \pi + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CD}) + 2k\pi$
   $= \pi + \dfrac{\pi}{4} + \pi - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi$
   $= \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$
   donc $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF}) = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc (AB) et (BF) sont perpendiculaires.

Exercice 4 (3 pts) : $(k \in \mathbb{Z})$

1. $\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$
2. $\sqrt{3}\cos x = \sin x \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$
   $\Leftrightarrow 3\cos^2 x = 1 - \cos^2 x \Leftrightarrow \boxed{4\cos^2 x = 1}$

3. $\cos^2 x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{1}{2}$
   $\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ ou $\cos x = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$
   $\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$
   donc dans $[0; 2\pi[$ on obtient : $\boxed{S = \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}\right\}}$
4. $\sqrt{3}$ est positif et comme $\sqrt{3}\cos x = \sin x$ alors $\cos x$ et $\sin x$ doivent avoir le même signe.
5. Les seules solutions sont donc : $\boxed{S = \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3}\right\}}$

Exercice 5 (2 pts) : $(k \in \mathbb{Z})$
Il faut résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\phi}{\pi}(1 + \cos\alpha) = \frac{\phi}{2\pi}(2 - \sqrt{2})$$

Donc
$\dfrac{\phi}{\pi}(1 + \cos\alpha) = \dfrac{\phi}{2\pi}(2 - \sqrt{2}) \Leftrightarrow 1 + \cos\alpha = \dfrac{1}{2}(2 - \sqrt{2}) \Leftrightarrow 1 + \cos\alpha = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\Leftrightarrow \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$
or $\alpha \in [0; \pi]$ donc $\boxed{\alpha = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi}$

Exercice 6 (3 pts) :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $(x+3)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx+3ax^2+3bx+3c = ax^3+(b+3a)x^2+(c+3b)x+3c$
   Par analogie ou identification avec $x^3 + 8x^2 + 19x + 12$ on obtient :
   $\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b + 3a = 8 \\ c + 3b = 19 \\ 3c = 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 4 \\ c = 4 \end{array}\right.$
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\boxed{x^3 + 8x^2 + 19x + 12 = (x+3)(x^2+5x+4)}$
2. Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x+3)(x^2+5x+4)}{x-1}$$

   On va étudier le signe de $f(x)$:
   Racines de $x^2 + 5x + 4$: On obtient $x_1 = -1$ et $x_2 = -4$
   Tableau des signes de $f(x)$:

x	$-\infty$		-4		-3		-1		1		$+\infty$
$x+3$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
x^2+5x+4		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Donc
$\mathcal{C}_f$ est en dessous de l'axe des abscisses si $x \in]-4;-3[\cup]-1;1[$
$\mathcal{C}_f$ est au dessus de l'axe des abscisses si $x \in]-\infty;-4[\cup]-3;-1[\cup]1;+\infty[$

Exercice facultatif/Bonus/Supplémentaire (2 pts) :

On note Q un polynôme du second degré et x_1 et x_2 deux réels
On note $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1x_2$

1. Si $Q(x) = x^2 - Sx + P$ alors $Q(x) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-(x_1 + x_2))^2 - 4x_1x_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :
   $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_1 - x_2}{2} = x_1$
   $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{x_1 + x_2 - x_1 + x_2}{2} = x_2$
   donc les deux racines de P sont x_1 et x_2
2. Si les deux racines de Q sont x_1 et x_2
   alors $Q(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = (x - x_1)(x - x_2)$
   alors $Q(x) = x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2 = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 - Sx + P$
   alors $Q(x) = x^2 - Sx + P$