Exercice 1 (... pts) :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. Résolvons $\dfrac{2}{x-3} - \dfrac{3}{x+2} \geq 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2;3\}$
   $\dfrac{2}{x-3} - \dfrac{3}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x+2)-3(x-3)}{(x-3)(x+2)} \geq 0$
   $\Leftrightarrow \dfrac{2x+4-3x+9}{(x-3)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x+13}{(x-3)(x+2)} \geq 0$
   $\triangleright$ $-x+13$ s'annule en 13
   $\triangleright$ $(x-3)(x+2)$ s'annule en 3 et -2
   Tableau des signes : On note $A = \dfrac{-x+13}{(x-3)(x+2)}$

x	$-\infty$		-2		3		13		$+\infty$
$-x+13$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$(x+2)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
A		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

   Donc $\boxed{S =]-\infty;-2[\cup]3;13]}$

2. Résolvons $2\cos^2\theta - (2+\sqrt{3})\cos\theta + \sqrt{3} = 0$
   On pose $x = \cos\theta$ et on obtient l'équation $2x^2 - (2+\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$
   Disciminant : $\Delta = (2+\sqrt{3})^2 - 4(2)(\sqrt{3}) = 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 8\sqrt{3} = 7 - 4\sqrt{3}$
   Or $(2-\sqrt{3})^2 = 4 + 3 - 4\sqrt{3} = 7 - 4\sqrt{3}$ donc $\Delta = (2-\sqrt{3})^2$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles distinctes :
   $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$
   $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{4} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   Il reste à résoudre :
   $\triangleright$ $\cos\theta_1 = 1 \Leftrightarrow \cos\theta_1 = \cos 0$ donc $\theta_1 = 0 + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
   $\triangleright$ $\cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\theta_2 = \cos\dfrac{\pi}{6}$ donc $\theta_2 = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\theta_2 = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
   Conclusion $\boxed{S = \left\{-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi; 0 + 2k\pi; \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}}$ $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 2 (... pts) :

On note $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

1. $f(x)$ existe si et seulement si $1 - x > 0 \Leftrightarrow 1 > x$ donc $\boxed{D_f =]-\infty;1[}$
2. Pour tout a et b réels tels que $b < 1$ et $a < 1$, on a :
   $f(a) - f(b) = \dfrac{1}{\sqrt{1-a}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-b}} = \dfrac{\sqrt{1-b}-\sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a}\times\sqrt{1-b}}$
   $= \dfrac{(\sqrt{1-b}-\sqrt{1-a})(\sqrt{1-b}+\sqrt{1-a})}{(\sqrt{1-a}\times\sqrt{1-b})(\sqrt{1-b}+\sqrt{1-a})} = \dfrac{(\sqrt{1-b})^2-(\sqrt{1-a})^2}{(\sqrt{1-a}\times\sqrt{1-b})(\sqrt{1-b}+\sqrt{1-a})} =$
   $\dfrac{1-b-1+a}{(\sqrt{1-a}\times\sqrt{1-b})(\sqrt{1-b}+\sqrt{1-a})}$
   Donc $\boxed{f(a)-f(b) = \dfrac{a-b}{(\sqrt{1-a}\times\sqrt{1-b})(\sqrt{1-b}+\sqrt{1-a})}}$
3. On nomme a et b deux réels de $]-\infty;1[$ tels que $a < b$
   Comme $a > b$ alors $a - b$ est négatif.
   $(\sqrt{1-a}\times\sqrt{1-b})(\sqrt{1-b}+\sqrt{1-a})$ est un nombre positif.
   Donc $f(a)-f(b)$ est négatif donc $f(a) < f(b)$ et les images sont dans le même ordre que les antécédents donc f est strictement croissante sur $]-\infty;1[$.

Exercice 3 (... pts) :

Les deux questions ci-dessous sont indépendantes.

1. $x^2 + a = x^2 - |a| = x^2 - (\sqrt{|a|})^2 = \boxed{(x - \sqrt{|a|})(x + \sqrt{|a|})}$
2. Résolvons $|x|^2 + 2|x| - 15 = 0$
   On note $t = |x|$ et on obtient l'équation : $t^2 + 2t - 15 = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(-15) = 64 = 8^2$
   Δ est positif donc il y a deux racines réelles distinctes :
   $t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 + 8}{2} = 3$
   $t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 - 8}{2} = -5$
   donc il reste à résoudre :
   $\triangleright$ $|x_1| = t_1 \Leftrightarrow |x_1| = 3 \Leftrightarrow x_1 = 3$ ou $x_1 = -3$
   $\triangleright$ $|x_2| = t_2 \Leftrightarrow |x_2| = -5$ Impossible
   Donc $\boxed{S = \{-3; 3\}}$

Exercice 4 (... pts) :

1. La mesure principale des angles $\alpha = \dfrac{77\pi}{3}$ est $\boxed{-\dfrac{\pi}{3}}$
   La mesure principale des angles $\beta = 17$ est $\boxed{17 - 6\pi}$
   La mesure principale des angles $\theta = -\dfrac{21\pi}{2}$ est $\boxed{-\dfrac{\pi}{2}}$
2. $\cos\left(\dfrac{77\pi}{3}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \boxed{\dfrac{1}{2}}$
   $\sin\left(\dfrac{77\pi}{3}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$
3. $\cos\left(\dfrac{77\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{77\pi}{3}\right) = \boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$
   $\sin\left(\dfrac{77\pi}{3} + \pi\right) = -\sin\left(\dfrac{77\pi}{3}\right) = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

Exercice 5 (... pts) :

On donne $\sin x = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ et $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
   Donc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)^2 = \dfrac{16 - 2 - 6 + 2\sqrt{12}}{16} = \dfrac{8 + 4\sqrt{3}}{16}$
   Donc $\cos^2 x = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}$
   Comme $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos x > 0$
   donc $\cos x = \sqrt{\dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}}$
2. A l'aide de la calculatrice et sachant que $\sin x < 0$ et $\cos x > 0$ alors $\boxed{x = -\dfrac{\pi}{12}}$

Exercice 6 (... pts) :

1. $\sin^2 x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
   $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
   $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
   Donc $\boxed{S = \left\{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right\}}$ $k \in \mathbb{Z}$
2. $\cos x = \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2x)$
   $\Leftrightarrow x = 2x + 2k\pi$ ou $x = -2x + 2k\pi \Leftrightarrow x = -2k\pi$ ou $x = \frac{2k\pi}{3}$
   $\Leftrightarrow x = 2k\pi$ ou $x = \frac{2k\pi}{3}$ $k \in \mathbb{Z}$
   Donc $\boxed{S = \left\{\frac{2k\pi}{3}; 2k\pi\right\}}$ $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 7 (... pts) :

On note ϕ le nombre ci-dessous :

$$\phi = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + ...}}}$$

1. $\phi - 2 = \frac{2}{\phi}$
2. $\phi - 2 = \frac{2}{\phi} \Leftrightarrow \phi^2 - 2\phi - 2 = 0$
   $\Delta = 4 - 4(-2) = 12 = (2\sqrt{3})^2$ donc $\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes.
   ϕ étant positif, la seule possibilité est $\phi = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = \boxed{1 + \sqrt{3}}$
3. $\phi^3 = \phi^2 \times \phi$ or $\phi^2 = 2\phi + 2$
   donc $\phi^3 = (2\phi + 2)\phi = 2\phi^2 + 2\phi = 2(2\phi + 2) + 2\phi = 4\phi + 4 + 2\phi = \boxed{6\phi + 4}$

Exercice facultatif/Bonus/Supplémentaire (1 pts) :

Pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:

$1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$