La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.
LA CALCULATRICE EST AUTORISEE POUR CE DS

Exercice 1 (4,5 pts) :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. On travaille dans $\mathbb{R}$:
   $x^4 - 4x^2 = -3 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 3 = 0$
   En posant $t = x^2$ on obtient l'équation $t^2 - 4t + 3 = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4 = 2^2$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles distintctes :
   $t_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+2}{2} = 3$ et $t_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-2}{2} = 1$
   Il faut donc maintenant résoudre :
   $x_1^2 = 3 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{3}$ ou $x_1 = -\sqrt{3}$
   $x_2^2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1$ ou $x_2 = -1$
   L'ensemble des solutions est $\boxed{S = \{-\sqrt{3}; -1; 1; \sqrt{3}\}}$
2. On travaille dans $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$:
   $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x} = \dfrac{3x^2-1}{x^2-x} \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x(x-1)} + \dfrac{3(x-1)}{x(x-1)} - \dfrac{3x^2-1}{x^2-x} = 0$
   $\Leftrightarrow \dfrac{2x + 3(x-1) - (3x^2-1)}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-3x^2+5x-2}{x(x-1)} = 0$
   $\Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(2) = 25 - 24 = 1 = 1^2$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réeeles distinctes :
   $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+1}{6} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-1}{6} = \dfrac{2}{3}$
   1 est une valeur interdite donc il ne faut pas la prendre comme solution.
   L'ensemble des solutions est $\boxed{S = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}}$
3. On travaille dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$:
   En posant $t = \dfrac{1}{1+x}$ on obtient l'équation $4t^2 - 12t + 9 = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(4)(9) = 144 - 144 = 0$
   $\Delta = 0$ donc il y a une seule solution réelle :
   $t_1 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$
   Il faut donc maintenant résoudre :
   $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2 = 3(1+x) \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$
   L'ensemble des solutions est $\boxed{S = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}}$

Exercice 2 (7 pts) :

▷ Etude de f :

1. $f(x) \Leftrightarrow 3x - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ donc $\boxed{\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}}$
2. Pour tout $x \in \mathbb{D}_f$:
   $f(x) = \dfrac{6x-13}{3x-9} = \dfrac{2(3x-9)+5}{3x-9} = \dfrac{2(3x-9)}{3x-9} + \dfrac{5}{3x-9} = \boxed{2 + \dfrac{5}{3x-9}}$
3. D'après le cours, comme $5 \times 3 > 0$ alors :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

4. Si $A(x;f(x))$ est un point de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses alors $f(x)=0$
   $f(x)=\dfrac{6x-13}{3x-9}=0 \Leftrightarrow 6x-13=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{13}{6}$ donc $\boxed{A\left(\dfrac{13}{6};0\right)}$
5. Si $A(x;f(x))$ est un point de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des ordonnées alors $x=0$
   $f(0)=\dfrac{0-13}{0-9}=\dfrac{13}{9}$ donc $\boxed{B\left(0;\dfrac{13}{9}\right)}$
6. Tableau des signes de $f(x)$:

x	$-\infty$		$13/6$		3		$+\infty$
$6x-13$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$3x-9$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

▷ Etude de g :

1. $g(x)$ existe pour toutes les valeurs de x réelles donc $\boxed{D_g=\mathbb{R}}$
2. Pour tout x réel :
   $g(x)=-2(x^2-6x+8)=-2[(x-3)^2-9+8]=-2[(x-3)^2-1]=\boxed{-2(x-3)^2+2}$
3. D'après le cours, comme $-2<0$ alors :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
			2		
f		$\nearrow$		$\searrow$	

4. Si $A(x;f(x))$ est un point de $\mathcal{C}_g$ et de l'axe des abscisses alors $f(x)=0$
   $g(x)=-2[(x-3)^2-1]=0 \Leftrightarrow (x-3)^2-1=0 \Leftrightarrow (x-4)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=4$ ou $x=2$
   $\boxed{C\,(4;0)}$ et $\boxed{D\,(2;0)}$
5. Si $A(x;f(x))$ est un point de $\mathcal{C}_g$ et de l'axe des ordonnées alors $x=0$
   $g(0)=-16$ donc $\boxed{E\,(0;-16)}$
6. Tableau des signes de $g(x)$:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

▷ Etude de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$:

1. $\mathcal{C}_f$ est une hyperbole de centre de symétrie $\boxed{S(3;2)}$
2. $\mathcal{C}_g$ est une parabole tournée vers le bas de sommet $S(3;2)$
3. Voir la feuille annexe.

Exercice 3 (2 pts) :

On note a un réel.

1. $\Delta=b^2-4ac=(-a)^2-4(1)(a)=a^2-4a=a(a-4)$
   L'équation admet deux solutions réelles distinctes si et seulement si $\Delta>0$
   Donc $\boxed{a\in]-\infty;0[\cup]4;+\infty[}$
2. $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-y \\ y(-1-y)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-y \\ y^2+y-1=0 \end{cases}$
   On obtient donc à résoudre l'équation de la question précédente avec $a=-1$
   Elle admet deux solutions réeeles distinctes car $-1\in]-\infty;0[\cup]4;+\infty[$
   et $\Delta=-1(-1-4)=5$
   $y_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $y_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$
   donc
   $x_1=-1-\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=-1-\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
   L'esnsemble des solutions est $\boxed{S=\left\{\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right);\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}}$

Exercice 4 (4 pts) :

1. $\Delta = b^2 - 4ac = (10^7)^2 - 4(1)(-2.10^{14}) = 10^{14} + 8.10^{14} = 9.10^{14} = (3.10^7)^2$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :
   $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-10^7 + 3.10^7}{2} = \dfrac{2.10^7}{2} = 10^7$
   $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-10^7 - 3.10^7}{2} = \dfrac{-4.10^7}{2} = -2.10^7$
   Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S = [-2.10^7; 10^7]}$
2. $x^2 + 8$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ donc on travaille sur $\mathbb{R}$:
   $\dfrac{x}{x^2+8} \geq 3 \Leftrightarrow \dfrac{x - 3(x^2+8)}{x^2+8} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-3x^2 + x - 24}{x^2+8} \geq 0$
   Cherchons les racines de $-3x^2 + x - 24$
   $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-3)(-24) < 0$ donc il n'y a pas de racines réelles.
   $-3x^2 + x - 24$ est toujours négatif sur $\mathbb{R}$ et $x^2 + 8$ est toujorus positif sur $\mathbb{R}$
   Donc $\boxed{S = \emptyset}$

Exercice 5 (2,5 pts) :

On note $f : x \longmapsto x^2 - x - 1$ puis α et β ses deux racines réelles distinctes.

1. α est une racine de f donc $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$
   β est une racine de f donc $\beta^2 - \beta - 1 = 0$
   Par soustraction on obtient :
   $\alpha^2 - \beta^2 - \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta}$
2. Comme $\alpha \neq \beta$ alors $\alpha - \beta \neq 0$ on peut donc diviser par $\alpha - \beta$:
   Donc $\boxed{\alpha + \beta = 1}$
3. D'après la question précédente :$\beta = 1 - \alpha = 1 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \boxed{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$
4. $\alpha\beta = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{1-5}{4} = -1$ donc $\boxed{\alpha\beta = -1}$
5. α vérifie $\alpha^2 = \alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha^3 = \alpha^2\alpha = (\alpha+1)\alpha = \alpha^2 + \alpha = \alpha + 1 + \alpha = 2\alpha + 1$
   donc $\boxed{\alpha^3 = 2\alpha + 1}$
   α vérifie $\alpha^2 = \alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$ et $\dfrac{\alpha^2}{\alpha} = \dfrac{\alpha+1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = 1 + \alpha^{-1} \Leftrightarrow \alpha^{-1} = \alpha - 1$
   donc $\boxed{\alpha^{-1} = \alpha - 1}$

Exercice facultatif/Bonus/Supplémentaire (2 pts) :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $(x^2 - 3x + 2)^2 = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x + 2) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x^3 + 9x^2 - 6x + 2x^2 - 6x + 4 =$
   $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$
2. $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 3)(x^2 - 3x + 1) = 0$
   $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 0$ ou $x^2 - 3x + 1 = 0$
   En résolvant ces deux équations on obtient : $\boxed{S = \left\{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}}$

NOM : PRENOM :
CLASSE :