

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

LA CALCULATRICE EST AUTORISÉE POUR CE DS

Exercice 1 (4,5 pts) :

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $x^4 - 4x^2 = -3$
2. $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x} = \frac{3x^2 - 1}{x^2 - x}$
3. $\frac{4}{(1+x)^2} - \frac{12}{1+x} + 9 = 0$

Exercice 2 (7 pts) :

On note $f : x \mapsto \frac{6x - 13}{3x - 9}$ et $g : x \mapsto -2x^2 + 12x - 16$

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les représentations graphiques de f et g dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

▷ Etude de f :

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Déterminer deux réels α et β tels que pour tout $x \in \mathbb{D}_f : f(x) = \alpha + \frac{\beta}{3x - 9}$
3. En déduire le tableau des variations de f .
4. Déterminer les points d'intersection entre \mathcal{C}_f et l'axe des abscisses.
5. Déterminer les points d'intersection entre \mathcal{C}_f et l'axe des ordonnées.
6. Dresser le tableau des signes de $f(x)$

▷ Etude de g :

1. Quel est l'ensemble de définition de g ?
2. Déterminer la forme canonique de g .
3. En déduire le tableau des variations de g .
4. Déterminer les points d'intersection entre \mathcal{C}_g et l'axe des abscisses.
5. Déterminer les points d'intersection entre \mathcal{C}_g et l'axe des ordonnées.
6. Dresser le tableau des signes de $g(x)$

▷ Etude de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g :

1. Décrire la courbe représentative de f .
2. Décrire la courbe représentative de g .
3. Tracer $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ dans le repère de la feuille annexe en inscrivant les points d'intersection trouvés aux questions précédentes.

Exercice 3 (2 pts) :

On note a un réel.

1. Déterminer les valeurs possibles de a pour que l'équation $x^2 - ax + a = 0$ puisse avoir deux solutions réelles distinctes.
2. Déterminer deux nombres réels x et y tels que $x + y = xy = -1$.

Exercice 4 (4 pts) :

Résoudre les inéquations :

1. $x^2 + 10^7 x - 2 \cdot 10^{14} \leq 0$
2. $\frac{x}{x^2 + 8} \geq 3$

Exercice 5 (2,5 pts) :On note $f : x \mapsto x^2 - x - 1$ puis α et β ses deux racines réelles distinctes.

1. Démontrer que $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$
2. En déduire la valeur de $\alpha + \beta$
3. Sachant que $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ déterminer β
4. Vérifier que $\alpha\beta = -1$
5. Démontrer que $\alpha^3 = 2\alpha + 1$ et que $\alpha^{-1} = \alpha - 1$

Exercice facultatif/Bonus/Supplémentaire (2 pts) :

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x^2 - 3x + 2)^2 = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$
2. En déduire la résolution de l'équation $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 3 = 0$

NOM :

PRENOM :

CLASSE :

