La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.
A rendre pour le **Mercredi** 11 **Mai** 2011
**ATTENTION** : PROCHAIN DS : Vendredi 13 Mai 2011 sur les suites arithmétiques ou géométriques

## Exercice unique

Le problème des lapins fut proposé en 1202 par Fibonacci :
Possédant au départ un couple de lapins , combien de couples de lapins obtient-on en $n$ mois ($n \in \mathbb{N}^*$) si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?
On note $F_n$ le nombre de couples de lapins au $n$-ième mois de telle sorte que $F_1 = F_2 = 1$.
On note $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.

1. Calculer $\phi^{-1}$
2. Démontrer que $\phi^2 = \phi + 1$
3. En déduire que $\phi^{-1} = \phi - 1$
4. Démontrer que $\phi + \phi^{-1} = \sqrt{5}$
5. Calculer $F_3$, $F_4$ et $F_5$. (Faire une arbre)
6. Déterminer une relation entre $F_{n+2}$, $F_{n+1}$ et $F_n$.
7. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = F_{n+1} - \phi F_n$
   (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1} = -\phi^{-1} u_n$
   (b) Calculer $u_1$
   (c) En déduire une relation entre $u_n$ et $u_{n-1}$
   (d) En déduire une relation entre $u_n$ et $u_1$
   (e) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$
   (f) En déduire une relation entre $F_{n+1}$ et $F_n$
8. On note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n = \left(\phi + \phi^{-1}\right) F_n + (-1)^n \phi^{-n}$
   (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_{n+1} = \phi v_n$
   (b) Calculer $v_1$
   (c) En déduire une relation entre $v_n$ et $v_{n-1}$
   (d) En déduire une relation entre $v_n$ et $v_1$
   (e) En déduire que $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left[\phi^n - (-1)^n \phi^{-n}\right]$
   Le reproduction des lapins serait en lien avec le nombre d'or ! Emerveillez-vous de nouveau !!!!
9. A l'aide d'un algorithme et du logiciel Algobox, déterminer la limite de la suite $F_n$ puis celle de $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.
10. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \dfrac{\phi^n - (-1)^n \phi^{-n}}{\phi + \phi^{-1}}$
11. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$