La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.
A rendre pour le **Mercredi** 6 **Avril** 2011
ATTENTION : PROCHAIN DS : MERCREDI 20 Avril 2011 en salle du **réfectoire**

Exercice 01 :

Dans cet exercice, x désigne un réel de $[0;1]$
On note $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = nx^n(1-x)$
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : u_n est le maximum de f_n sur $]0;1]$

1. Que peut-on dire de f_0 et de u_0 ?
2. Étudier les variations de la fonction f_1 puis en déduire u_1
3. Étudier les variations de la fonction f_2 puis en déduire u_2
4. Étudier les variations de la fonction f_3 puis en déduire u_3
5. Tracer à l'aide de Géogebra les représentations graphiques de f_0, f_1, f_2 et f_3 puis en rouge de f_{20} et f_{100}.
6. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Étudier les variations de la fonction f_n puis en déduire u_n en fonction de n.
8. Construire à l'aide du logiciel Algobox, un algorithme qui calcule les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
9. Vérifier à l'aide de votre algorithme, la conjecture précédente.

Exercice 02 :

Dans cet exercice, x désigne un réel de $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = \cos x$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = u_n \times \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

1. On note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $v_n = u_n \times \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$
   Démontrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2} \times v_n$
2. Vérifier que $v_1 = \dfrac{1}{2}v_0$
3. Démontrer que s'il existe un entier naturel n tel que $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times v_0$ alors $v_{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \times v_0$
4. Calculer v_0
5. Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel n alors $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \times \sin(2x)$
6. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de x et de n.
7. A l'aide d'un algorithme et d'Algobox, vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[u_n - \dfrac{\sin(2x)}{2x}\right] = 0$
8. En déduire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $\dfrac{2}{\pi}$
9. En déduire une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers π

Petite précision : Vous devez m'envoyer les algorithmes et le fichier geogebra sur mon adresse email professionnelle ou m'inprimer les documents et les mettre dans la copie.