La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.
A rendre pour le **Mercredi** 9 **Février** 2011
ATTENTION : PROCHAIN DS : MERCREDI 16 Février 2011 en salle de cours $B312$

Exercice 01 :

On se propose d'étudier le minimum de $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\sqrt{a+b}$
où les nombres réels a et b sont strictement positifs.

1. Déterminer une fonction $f : x \longmapsto f(x)$ telle que $f\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\sqrt{a+b}$
2. Calculer f' et en déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$
3. Quel est donc le minimum de $A=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\sqrt{a+b}$ et en quelle valeur A est-il égal à ce minimum ?

Exercice 02 :

Partie 1 On souhaite démontrer que pour $x \in [0;+\infty[$, $x-\frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

1. Tracer dans un repère et pour $x \in [0;2\pi]$, la représentation des fonctions :
   $f : x \longmapsto x$ puis $g : x \longmapsto \sin x$ et enfin $h : x \longmapsto x-\frac{x^3}{6}$.
   Vous pouvez faire cette question à l'aide d'un logiciel tel que Geogebra.
2. On note $u : x \longmapsto \sin x - x$
   Etudier les variations de u sur $[0;+\infty[$. Comparer alors x et $\sin x$.
3. On note $v : x \longmapsto 1-\frac{x^2}{2}-\cos x$
   Déterminer les variations de v sur $[0;+\infty[$.
   On note $w : x \longmapsto x-\frac{x^3}{6}-\sin x$
   Déterminer les variations de w sur $[0;+\infty[$. Comparer alors $x-\frac{x^3}{6}$ et $\sin x$
4. Endéduire un encadrement de $\sin x$ sur $[o;+\infty[$ puis $sin(0,1)$

Partie 2 Démontrons que pour $x \in [0;+\infty[$, $1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$

1. Tracer dans un repère et pour $x \in [0;2\pi]$, la représentation des fonctions :
   $f : x \longmapsto 1-\frac{x^2}{2}$ puis $g : x \longmapsto \cos x$ et enfin $h : x \longmapsto 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$.
   Vous pouvez faire cette question à l'aide d'un logiciel tel que Geogebra.
2. En vous inspirant de la partie 1, montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$ alors :
   $$1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$
3. Endéduire un encadrement de $cos(0,1)$