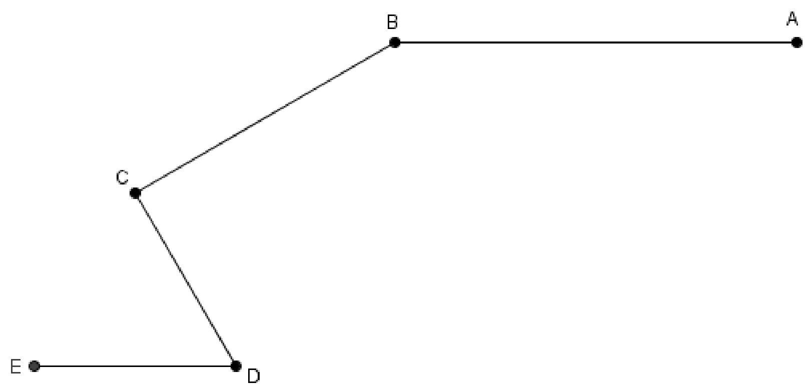
Exercice 04 : k est un nombre entier relatif.

$(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}) + 2k\pi$
$\Rightarrow (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (-\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}) + 2k\pi$
or $(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pi + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ donc
$\Rightarrow (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \pi + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}) + 2k\pi$
$\Rightarrow (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = \pi - \dfrac{2\pi}{3} + \pi + \dfrac{\pi}{4} + \pi + 2k\pi$
$\Rightarrow (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = -\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4} + \pi + 2k\pi$
$\Rightarrow (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = \dfrac{-8\pi + 3\pi + 12\pi}{12} + 2k\pi$
$\Rightarrow (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = \dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi$

Exercice 05 : k est un nombre entier relatif.



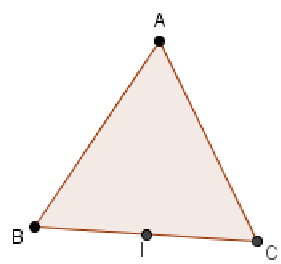
2)
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}) + 2k\pi$
$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) = (-\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (-\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) + (-\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}) + 2k\pi$
$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) = \pi + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \pi + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) + \pi + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}) + 2k\pi$
$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) = \pi - \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$
$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) = \dfrac{6\pi - 5\pi - 3\pi + 2\pi}{6} + 2k\pi$
$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) = 0 + 2k\pi$
3)
Comme $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) = 0 + 2k\pi$ alors $(AB)//(DE)$
donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et comme $AB = 4$ et $DE = 2$ alors $\overrightarrow{DE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Exercice 06 : k est un nombre entier relatif.

1. $(\widehat{\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AG}}) + (\widehat{\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}}) = (\widehat{\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}}) + 2k\pi = (\widehat{\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{DE}}) + 2k\pi$ d'après la relation de Chasles.

2. $ABFG$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GF}$
   $CDEF$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CF}$
   donc
   $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}})=(\widehat{\overrightarrow{GF},\overrightarrow{CF}})+2k\pi=(\widehat{\overrightarrow{FG},\overrightarrow{FC}})+2k\pi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$
3. D'après les deux questions précédentes :
   $(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{DE}})=(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AG}})+(\widehat{\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AB}})+(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}})+2k\pi$
   donc
   $(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{DE}})=-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}+2k\pi=0+2k\pi$
   $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont donc colinéaires et dans le même sens donc $(AH)//(DE)$.

Exercice 07 : k est un nombre entier relatif.

1. 

2. $M\in\mathcal{E}\Leftrightarrow(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=0+2k\pi$
   $\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires et dans le même sens
   $\Leftrightarrow M\in(AB)\backslash]AB[$
3. (a) Montrons que $(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{AB})=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$:
   $(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IA})+(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{AB})+2k\pi$
   $\Rightarrow(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{AB})=\dfrac{\pi}{2}+\pi+(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB})+2k\pi$
   $\Rightarrow(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{AB})=\dfrac{\pi}{2}+\pi+\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$
   $\Rightarrow(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{AB})=\dfrac{10\pi}{6}+2k\pi=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$
   donc $C\in\mathcal{F}$
   (b) $M\in\mathcal{F}\Leftrightarrow(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{AB})=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$
   $\Leftrightarrow(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IC})+(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{AB})=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$
   $\Leftrightarrow(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IC})-\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$
   $\Leftrightarrow(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IC})=0+2k\pi$
   (c) $M\in\mathcal{F}\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires et dans le même sens $\Leftrightarrow M\in[IC)$
4. $M\in\mathcal{S}\Leftrightarrow(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC})=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$
   (a) IAC est dans le sens indirect.
   (b) IAC est un triangle rectangle en I donc I est sur le cercle de diamètre $[AC]$.

(c) $M \in \mathcal{S} \Leftrightarrow MAC$ est un triangle rectangle en M direct
donc M est sur le demi cercle de diamètre $[AC]$ ne contenant pas I et en enlevant A et B.