Exercice 01 :

Quelle fraction représente l'aire du secteur angulaire par rapport à l'aire du disque entier ? :

Dans cet exercice nous avons évidemment : $\theta \neq 0$, $\theta \neq \pi$ et $\theta \neq 2\pi$;

L'aire du secteur angulaire est $\dfrac{\theta}{2\pi}$ fois l'aire du disque entier.

Calculons l'aire du secteur angulaire :

$A_1 = \dfrac{\theta}{2\pi} \times \pi R^2 = \dfrac{\theta R^2}{2}$ donc $\boxed{A_1 = \dfrac{\theta R^2}{2}}$

Calculons l'aire du triangle.

Dans le triangle AEM on a $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{ME}{x}$ donc $ME = x\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

De plus $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{AM}{x}$ donc $AM = x\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

Or $Aire_{AEF} = 2 \times Aire_{AME} = 2 \times \dfrac{x\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \times x\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{2} = x^2 \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

Réponse à la question posée :

Il faut résoudre l'équation $\dfrac{1}{2}A_1 = A_2$

D'après les conditions : $\theta \neq 0$, $\theta \neq \pi$ et $\theta \neq 2\pi$ nous pouvons dire que $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \neq 0$

donc $x^2 \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\theta R^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{R^2\theta}{4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$ qui est positif donc

$x = \sqrt{\dfrac{R^2\theta}{4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{R^2\theta}{4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}}$

x étant une longueur, elle doit être positive donc la seule solution est :

$x = \sqrt{\dfrac{R^2\theta}{4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}} = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{\theta}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}}$

Donc

$$\boxed{x = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{\theta}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}}}$$

Exercice 02 :

1. Le mobile M atteint le sol si $y(t) = 0$.
   $y(t) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}gt^2 + V_0\sin(\alpha)t + y_0 = 0$
   Cherchons les solutions de cette équation :
   $\Delta = b^2 - 4ac = (V_0\sin(\alpha))^2 - 4\left(-\dfrac{1}{2}g\right)(y_0) = V_0^2\sin^2(\alpha) + 2gy_0$
   Les valeurs de V_0, $\sin(\alpha)$, g et y_0 étant positives alors $\Delta > 0$
   donc il y a deux racines réelles distinctes :

$t_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-V_0\sin(\alpha) - \sqrt{V_0^2\sin^2(\alpha)+2gy_0}}{-g} = \dfrac{V_0\sin(\alpha) + \sqrt{V_0^2\sin^2(\alpha)+2gy_0}}{g}$
Les valeurs de V_0, $\sin(\alpha)$, g et y_0 étant positives alors $t_1 > 0$
$t_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-V_0\sin(\alpha) + \sqrt{V_0^2\sin^2(\alpha)+2gy_0}}{-g} = \dfrac{V_0\sin(\alpha) - \sqrt{V_0^2\sin^2(\alpha)+2gy_0}}{g}$
Les valeurs de V_0, $\sin(\alpha)$, g et y_0 étant positives
$V_0^2\sin^2(\alpha) < V_0^2\sin^2(\alpha)+2gy_0$ donc comme $x \longmapsto \sqrt{x}$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$
alors $\sqrt{V_0\sin(\alpha)} < \sqrt{V_0^2\sin^2(\alpha)+2gy_0}$ donc $V_0\sin(\alpha) < \sqrt{V_0^2\sin^2(\alpha)+2gy_0}$
donc t_2 est négative.

La seule solution positive est donc $\boxed{t_1 = \dfrac{V_0\sin(\alpha) + \sqrt{V_0^2\sin^2(\alpha)+2gy_0}}{g}}$

2. $x(t_1) = V_0\cos(\alpha)t_1 + x_0 = V_0\cos(\alpha) \times \dfrac{V_0\sin(\alpha) + \sqrt{V_0^2\sin^2(\alpha)+2gy_0}}{g} + x_0$

   Donc $\boxed{x(t_1) = V_0\cos(\alpha) \times \dfrac{V_0\sin(\alpha) + \sqrt{V_0^2\sin^2(\alpha)+2gy_0}}{g} + x_0}$

Exercice 03 :

1. C'est évident : $\varepsilon^2 = 1 + \varepsilon$!
2. Comme $\varepsilon > 0$ et après avoir résolu l'équation on obtient : $\varepsilon = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
   C'est le nombre d'or !!
3. $\varepsilon^2 = 1+\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon^3 = \varepsilon^2 + \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon^3 = 1 + \varepsilon + \varepsilon = 1 + 2\varepsilon$
4. $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$ et $\varepsilon \neq 0$ donc on peut diviser par ε
   $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon+1}{\varepsilon} = 1 + \varepsilon^{-1}$ Donc $\varepsilon^{-1} = \varepsilon - 1$