Exercice 01 :

1. Le périmètre du cercle est $\boxed{L_1 = 2\pi R}$
   La longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est $\boxed{L_2 = R\alpha}$
   Calculons la longueur de DC :
   Le triangle DOC est rectangle en D car la tangente (CD) est perpendiculaire au rayon $[DO]$.
   D'après le théorème de Pythagore :
   $DC^2 = CO^2 - DO^2 = (R+h)^2 - R^2 = R^2 + 2hR + h^2 - R^2 = 2hR + h^2$
   Donc $DC = \sqrt{2hR + h^2}$ ou $DC = -\sqrt{2hR + h^2}$ or DC est une longueur donc positive
   Conclusion : $\boxed{DC = \sqrt{2hR + h^2}}$
   Calculons l'allongement al :
   $al = (L_1 - 2L_2 + 2DC) - L_1 = L_1 - 2L_2 + 2DC - L_1 = 2DC - 2L_2 = 2\sqrt{2hR + h^2} - 2R\alpha$
   Donc l'allongement de la corde est $\boxed{al = 2(\sqrt{2hR + h^2} - R\alpha)}$
2. Hauteur h :
   $h = 828\ m$
   Calculons le rayon R :
   $R = \dfrac{L_1}{2\pi} = \dfrac{40000000}{2\pi} = \dfrac{2.10^7}{\pi}\ km$
   Calculons la mesure de l'angle α :
   Dans le triangle ODC rectangle en D :
   $Cos(\alpha) = \dfrac{DO}{CO} = \dfrac{R}{R+h} \approx 0.999869955$ donc $\alpha \approx 0.01612748\ radian$
   Calculons DC :
   $DC = \sqrt{2hR + h^2} = \sqrt{2 \times 828 \times \dfrac{2.10^7}{\pi} + 828^2}\ km$
   Calculons l'allongement :
   $al = 2\left(\sqrt{2 \times 828 \times \dfrac{2.10^7}{\pi} + 828^2} - 2 \times \dfrac{2.10^7}{\pi} \times \alpha\right) \approx 17,8324\ m$
   Donc $al \approx 17,8324\ m$ (Incroyable!!! Si peu ...)

Exercice 02 :

Partie 01 : Etude des solutions :

1. α est solution de l'équation donc $4\alpha^2 + 4\sqrt{3}\alpha - 1 = 0$
   β est solution de l'équation donc $4\beta^2 + 4\sqrt{3}\beta - 1 = 0$
   Si on soustrait ces deux égalités alors on obtient :
   $(4\alpha^2 + 4\sqrt{3}\alpha - 1) - (4\beta^2 + 4\sqrt{3}\beta - 1) = 0$
   $\Leftrightarrow 4\alpha^2 + 4\sqrt{3}\alpha - 4\beta^2 - 4\sqrt{3}\beta = 0$
   $\Leftrightarrow \boxed{4(\alpha^2 - \beta^2) + 4\sqrt{3}(\alpha - \beta) = 0}$
2. D'après la question précédente :
   $4(\alpha^2 - \beta^2) + 4\sqrt{3}(\alpha - \beta) = 0$
   $\Leftrightarrow 4(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + 4\sqrt{3}(\alpha - \beta) = 0$
   Or les deux solutions sont distinctes donc $\alpha - \beta \neq 0$
   On peut donc diviser par $\alpha - \beta$ et obtenir :
   $\Leftrightarrow 4(\alpha + \beta) + 4\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow \alpha + \beta = -\dfrac{-4\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3}$ donc $\boxed{\alpha + \beta = -\sqrt{3}}$

3. D'après la question précédente : $\alpha + \beta = -\sqrt{3}$ et si on multiplie par α on obtient :
   $\alpha^2 + \alpha\beta = -\sqrt{3}\alpha \Leftrightarrow \alpha\beta = -\sqrt{3}\alpha - \alpha^2$
   $\Leftrightarrow \alpha\beta = -(\alpha^2 + \sqrt{3}\alpha)$
   Or d'après l'équation du départ $\alpha^2 + \sqrt{3}\alpha = \dfrac{1}{4}$
   donc $\boxed{\alpha\beta = -\dfrac{1}{4}}$
4. $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$
   $\Leftrightarrow x^2 - \beta x - \alpha x + \alpha\beta = 0$
   $\Leftrightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$
   or d'après les questions précédentes $\alpha + \beta = -\sqrt{3}$ et $\alpha\beta = -\dfrac{1}{4}$
   donc $(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{3}x - \dfrac{1}{4} = 0$
   $\Leftrightarrow 4x^2 - 4\sqrt{3}x - 1 = 0$

Partie 02 Calcul des solutions :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
   $4\left(x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4 = 4\left(x^2 + \sqrt{3}x + \dfrac{3}{4}\right) - 4 = 4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 - 4$
   donc $\boxed{4\left(x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4 = 4x^2 + 4\sqrt{3}x - 1}$
2. $4x^2 + 4\sqrt{3}x - 1 = 0$
   $\Leftrightarrow 4\left(x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4 == 0$
   $\Leftrightarrow 4\left(\left(x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1\right) = 0$
   $\Leftrightarrow 4\left(x + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)\left(x + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = 0$
   $\Leftrightarrow x + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 0$ ou $x + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 0$
   $\Leftrightarrow x = -1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $x = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   Les solutions de l'équations sont : $S = \left\{-1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}; 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$
3. On note $\alpha = -1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   $\alpha + \beta = -1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$
   $\alpha\beta = \left(-1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1^2 + \dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{4}$

Beau DM, non ?