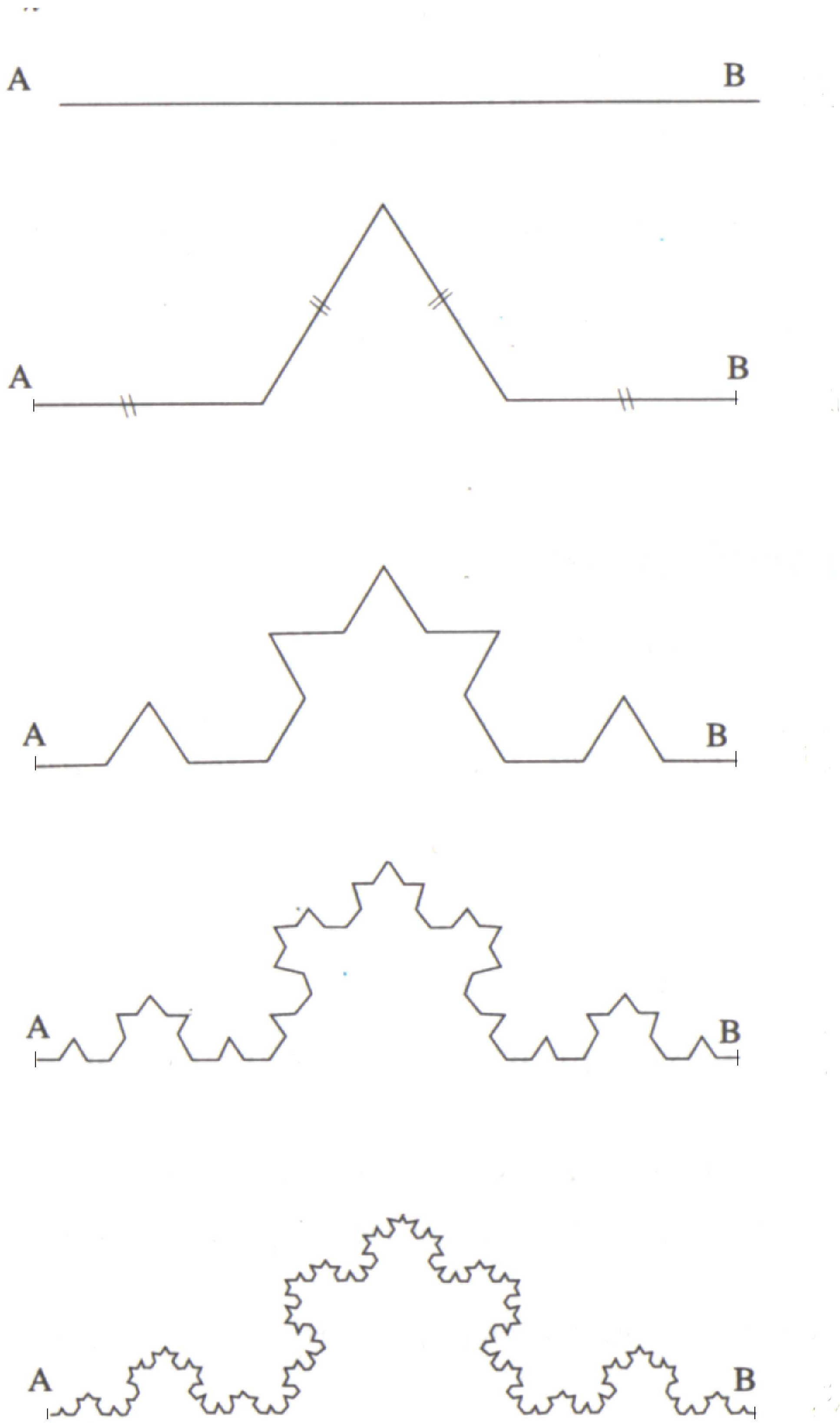
On note F_0 un segment $[AB]$ de longueur a, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$
On passe de F_0 à F_1 en divisant le segment en trois segments de même longueur et en construisant sur la partie centrale un triangle équilatéral.
On passe de F_n à F_{n+1} en appliquant à chaque côté de F_n le procédé précédent.



1. Étude du nombre k_n de côtés de F_n.

   (a) Donner k_0, k_1, k_2 et k_3.

   (b) Établir une relation de récurrence entre k_{n+1} et k_n.

   (c) En déduire k_n en fonction de n.

2. Étude de la longueur l_n de la courbe F_n.

   (a) Calculer l_0, l_1, l_2 et l_3 en fonction de a.

   (b) Justifier que $l_n = a\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$.

   (c) Vérifier que $\left(\dfrac{4}{3}\right)^9 > 10$.

   (d) En déduire que $l_{54} \geq a10^6$.

   (e) Déterminer un entier m tel que $l_m \geq a10^{100}$.

   (f) (l_n) converge t-elle ? Quelle est sa limite ?

3. Étude de l'aire A_n de la surface comprise entre F_n et le segment $[AB]$

   (a) Calculer A_0, A_1 et A_2.

   (b) Montrer que pour tout n, $A_{n+1} = A_n + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{36}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.

   (c) En additionnant membre à membre les égalités obtenues au b), montrer que :

$$A_n = \frac{a^2\sqrt{3}}{20}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

   (d) Vérifier que $\left(\dfrac{4}{9}\right)^6 < 10^{-2}$.

   (e) Peut-on déterminer un entier n à partir duquel $\left|A_n - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{20}\right|$ est inférieur à $a^2 10^{-100}$?

   (f) (A_n) converge t-elle ? Quelle est sa limite ?

4. En regardant les résultats des questions 2) f) et 3) f), que peux-tu dire sur la longueur de la courbe F_n et sur l'aire de la surface comprise entre F_n et le segment $[AB]$?

5. Sur une feuille blanche, Tracer les trois premières étapes de construction (F_0, F_1 et F_2) en partant d'un triangle équilatéral de côté 9 cm et plus d'un seul segment.