Exercice 1 (Suites arithmétiques)

1. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2n + 3$ est arithmétique.

2. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_1 = -2$ et de raison $r = -\dfrac{1}{2}$.

   (a) Calculer ses 4 premiers termes.

   (b) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1}

   (c) Exprimer u_n en fonction de n

3. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Démontrer que $2u_n = u_{n+1} + u_{n-1}$

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique. On sait que : $\begin{cases} u_6 + u_8 + u_{10} + u_{12} = 132 \\ u_2 + u_4 = 18 \end{cases}$
   Calculer sa raison et son premier terme u_1.

5. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + 2u_n}$

   (a) Calculer les cinq premiers termes de la suite u.

   (b) Si $u_n \neq 0$ on note $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Démontrer que la suite v est une suite arithmétique. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 2 (Suites géométriques)

1. Pour chacune des suites u, v, w définies ci-dessous par leur terme général, reconnaître celles qui sont géométriques et indiquer pour chacune d'entre elles le premier terme et la raison.

$$u_n = 2n^2 + 3 \qquad v_n = 3^n \qquad w_n = \frac{5^n}{3^{n+1}}$$

2. (a) t est une suite géométrique. On sait que $t_2 = 6$ et $t_5 = 162$. Calculer t_0 et la raison q.

   (b) On note u une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
   Comparer $u_0 \times u_8$ avec chacun des nombres
   $u_1 \times u_7$, $u_2 \times u_6$, $u_3 \times u_5$ et u_4^2

3. On note u la suite définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 +_2 + u_3 + \ldots + u_n$ en fonction de n.

4. On note v la suite géométrique définie par $v_0 = 1$ et $q = 2$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n$ en fonction de n.

5. (a) w la suite définie par $w_0 = 0,9$ et $u_{n+1} = 0,1u_n$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k = w_1 +_2 + w_3 + \ldots + w_n$ en fonction de n.

   (b) Sans utiliser la formule précédente, quelle est la valeur de S_2, S_3 et S_4

   (c) Que peux-tu en conclure si on fait tendre n vers $+\infty$?

Exercice 3
Au 1^{er} janvier 2005, une ville possède 100000 habitants. Chaque année, sa population augmente de 5%. Par ailleurs, chaque année, 1000 personnes viennent en plus s'installer dans cette ville.
On désigne par u_n la population de cette ville le 1^{er} janvier de l'année $2005 + n$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, puis calculer u_1,u_2 et u_3.

2. On définit la suite v par la relation $v_n = u_n + 20000$

(a) Calculer v_1, v_2 et v_3 puis Montrer que v est géométrique.

(b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 4

Soit la suite u définie pour tout naturel n non nul, par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n$

On admettra que pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$

1. Calculer les termes de la suite jusqu'à u_4.
2. Montrer que (u) est décroissante.
3. On pose pour tout $n \geq 1$, $v_n = \dfrac{u_n}{n}$
   (a) Montrer que v est une suite géométrique.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n

Exercice 5

Les suites u et v sont définies par :

$$u_n = \frac{3^n + 4n - 8}{4} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{3^n - 4n + 8}{4}$$

On note s et d les suites définies par $s_n = u_n + v_n$ et $d_n = u_n - v_n$

1. Démontrer que s est une suite géométrique.
2. Démontrer que d est une suite arithmétique.
3. En déduire $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} s_k = s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} + s_n$
4. En déduire $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} d_k = d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} + d_n$
5. On note $X = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $Y = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$
   (a) Montrer que X et Y vérifie le sustème : $\left\{\begin{array}{l} X + Y = A \\ X - Y = B \end{array}\right.$
   (b) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k + 4k - 8}{4} = -\frac{7}{4} - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \ldots + \frac{3^n + 4n - 8}{4}$ en fonction de n.
   (c) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k - 4k + 8}{4} = \frac{9}{4} + \frac{7}{4} + \frac{9}{4} + \ldots + \frac{3^n - 4n + 8}{4}$ en fonction de n.

Exercice 6

Calculer les sommes suivantes, en fonction de n:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{7}{3^k} = 7 + \frac{7}{3} + \frac{7}{9} + \frac{7}{27} + \ldots + \frac{7}{3^n}$