Exercice 1

On note $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les deux suites définies par :

$u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $v_n > u_n$
2. Démontrer que (u_n) est croissante.
3. Démontrer que (v_n) est décroissante.
4. En déduire que (u_n) et (v_n) sont bornées.

Exercice 2

On note $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les deux suites définies par :

$u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{3n^2}$

1. Démontrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $v_n > u_n$
2. Démontrer que (u_n) est croissante.
3. Démontrer que (v_n) est décroissante.
4. En déduire que (u_n) et (v_n) sont bornées.

Exercice 3

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. On note $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les deux suites définies par :

$u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$

1. (S_n) est elle croissante, décroissante ?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_{2n} - S_{2n+1}$
3. Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $u_n > v_n$
4. Démontrer que (u_n) est décroissante.
5. Démontrer que (v_n) est croissante.
6. En déduire que (u_n) et (v_n) sont bornées.