Les Suites
(En première S)

Dernière mise à jour : Jeudi 31 Mars 2011

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2010-2011)

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1 Définition et Vocabulaire

1.1 Définition

Une suite est une application dont tous les antécédents sont des entiers naturels. Au lieu de noter x les antécédents, on les note n et au lieu de noter $f(n)$ l'image de n par f on notera u_n.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble des images u_n pour $n \in \mathbb{N}$.
Exemples :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 4n + 1$
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$
3. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $w_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_{n-1} + 1$
4. $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $t_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_{n+1} = \dfrac{t_n - 1}{t_n + 1}$

1.2 Vocabulaire

Attention il ne faut pas confondre u_n, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, u ou (u_n).

- u_n représente le terme qui est au rang (à la place) n ou le n$^{\text{ième}}$ terme de la suite.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u ou (u_n) représente la suite avec tous ses termes.
- n est l'indice de u_n.
- u_{n-1} représente le terme précédent de u_n ou le suivant de u_{n-2}
- u_{n+1} représente le terme suivant de u_n ou le précédent de u_{n+2}

Exemples

1. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = (-1)^n \times n$
   (a) Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.
   (b) Exprimer u_{n+1} et u_{n-1} en fonction de n.
   (c) Exprimer u_{2n} et u_{2n+1} en fonction de n.
2. On note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_1 = 1$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n + 1}{v_n}$
   (a) Calculer les cinq premiers termes de la suite.
   (b) Exprimer v_n en fonction de v_{n-1}.
   (c) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

1.3 Différentes façons de définir une suite

1.3.1 u_n est en fonction de n

Il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = f(n)$

Exemples :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 4n^2 + 3n - 5$
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \dfrac{3n-1}{6-4n}$
3. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_n = \sqrt{2n-7}$

1.3.2 u_n est en fonction de u_{n-1} (Suites récurrentes)

Il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$u_1 = \alpha$ et $u_n = f(u_{n-1})$ ou $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemples :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 4u_n^2 + 3u_n - 5$
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_1 = 7$ et $v_n = \dfrac{3v_{n-1}-1}{6-4v_{n-1}}$
3. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_0 = 1$, $w_1 = 2$ et $w_{n+1} = w_n + w_{n-1}$

1.3.3 Autres possibilités

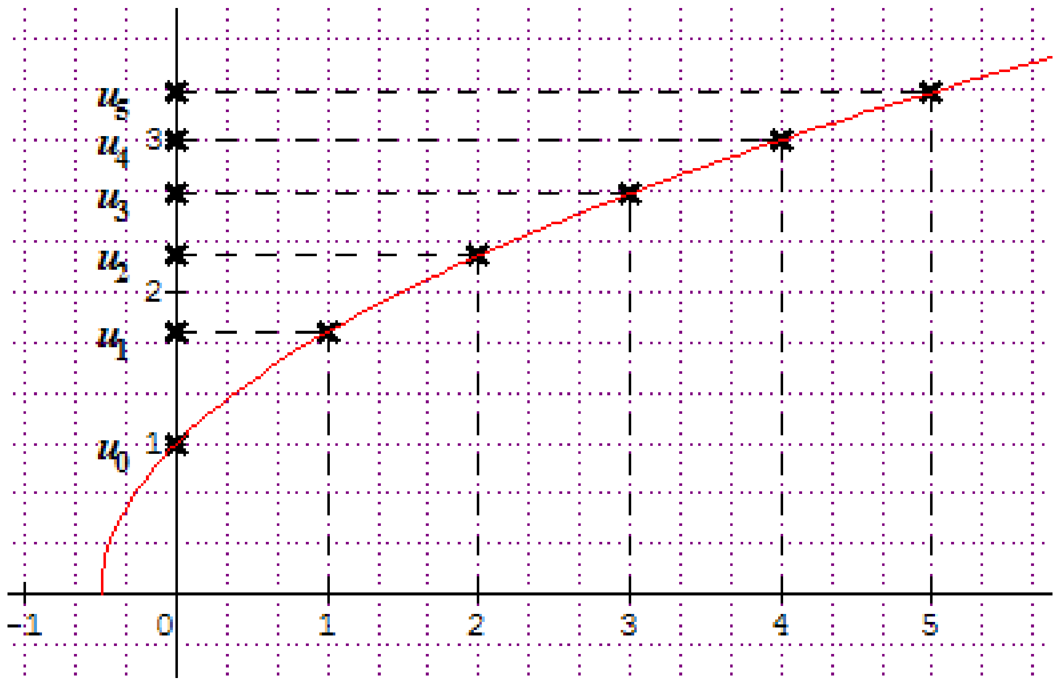
Il y a certaines suites qui ne sont pas définies en fonction de n ni en fonction des termes précédents.
Exemples :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par u_n est la $n^{\text{ième}}$ décimale de π.
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par v_n est la $(n+1)^{\text{ième}}$ décimale de $\dfrac{22}{3}$.

2 Représentation graphique

2.1 Suites en fonction de n

Pour représenter graphiquement une suite définie en fonction de n, il suffit de représenter l'image de chacun des antécédents entiers positifs.
Exemple :
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \sqrt{2n+1}$
On commence par étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+1}$ avec précision dans un repère orthonormé.



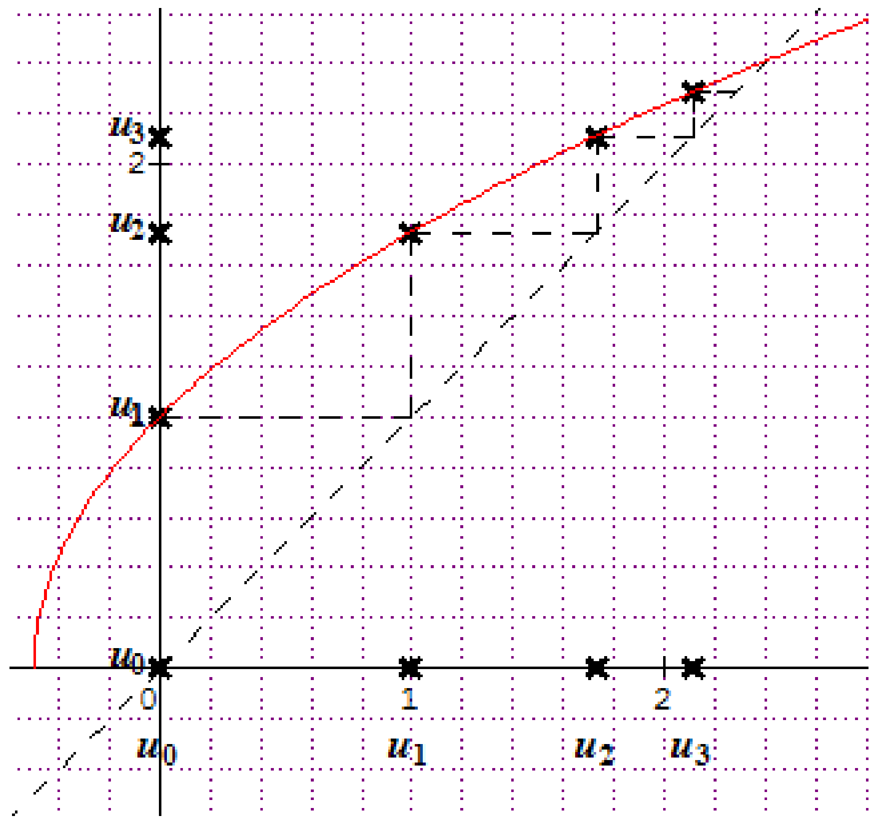
2.2 Suites définies par récurrence

Pour représenter graphiquement une suite définie par récurrence, il suffit de représenter l'image de du premier terme et ensuite d'utiliser la droite d'équatin $y = x$ pour replacer l'image sur la droite des abscisses, puis de tracer l'image de ce nouveau terme. Ainsi de suite ...

Exemple :

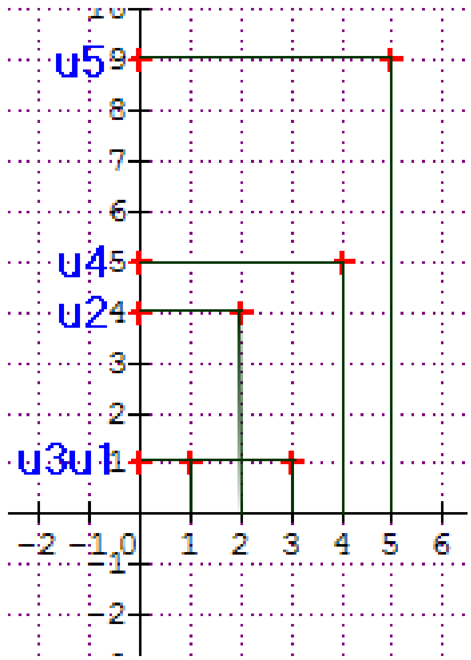
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1}$

On commence par étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x + 1}$ avec précision dans un repère orthonormé.



2.3 Autres cas

Il faut tracer les termes un par un sur le repère.
Exemple : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par u_n est la $n^{\text{ième}}$ décimale de π.


u5
u4
u2
u3u1

3 Variations d'une suite

3.1 Suite croissante

Définition 1 :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$

Définition 2 :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si
$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

Exemples :

3.2 Suite décroissante

Définition 1 :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$

Définition 2 :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si
$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

Exemples :

3.3 Suite constante

Définition :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$

3.4 Suite monotone

Définition :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si et seulement si
elle est soit croissante, soit décroissante ou soit constante.

Exemples :

4 Suite majorée, minorée ou bornée

4.1 Suite majorée

Définition :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \alpha$

Exemple :

4.2 Suite minorée

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \alpha$

Exemple :

4.3 Suite bornée

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\beta \leq u_n \leq \alpha$

Exemple :

5 Limite d'une suite et convergence

5.1 Définition

Définition :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si elle admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

On dit alors que () converge vers sa limite l ou que (u) admet une limite finie l en $+\infty$.
Définition de la limite :

(u) converge vers l : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$ on a $|u_n - l| < \varepsilon$

5.2 Représentation graphique

5.3 Le théorème des gendarmes et de comparaison

6 Les suites arithmétiques

6.1 Définition et vocabulaire

Définition :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique si et seulement si pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours la même constante r.
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$ avec $r \in \mathbb{R}$

6.2 Différentes formules

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p, $p \in \mathbb{N}$
Formule 1 :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_p + (n-p)r}$$

Cas particuliers :
➠ Si le premier terme est u_0 alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$
➠ Si le premier terme est u_1 alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_1 + (n-1)r$

Comment démontrer qu'une suite est arithmétique ?
Pour démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, il faut étudier la différence entre u_{n+1} et u_n. Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est une constante (résultat indépendant de n).
Exemple :

6.3 Variations

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p, $p \in \mathbb{N}$
$u_{n+1} - u_n = (u_p + (n+1-p)r) - (u_p + (n-p)r) = r$
Conclusion :

Si $r > 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Si $r < 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Si $r = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

6.4 Somme des p premiers termes

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1, $p \in \mathbb{N}$
On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n$
On cherche à calculer S_n en fonction de n.

Première étape Exprimons S_n en fonction de u_1

$$S_n = (u_1) + (u_1 + r) + (u_1 + 2r) + \ldots + (u_1 + (n-2)r) + (u_1 + (n-1)r)$$

Deuxième étape Exprimons S_n en fonction de u_n

$$S_n = (u_n - (n-1)r) + (u_n - (n-2)r) \ldots + (u_n - 2r) + (u_n - r) + (u_n)$$

Troisième étape Additionnons les deux formules ci-dessus :
$2S_n = n(u_1 + u_n)$ donc on obtient :

$$\boxed{S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}}$$

Formule plus générale :

$$\boxed{S_n = \frac{\text{Nombre de termes} \times (\text{Premier terme} + \text{Dernier terme})}{2}}$$

Exemple :
$1 + 2 + 3 + 5 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
Donc si on souhaite calculer la somme des entiers positifs juqu'à 45000 on obtient :
$1 + 2 + 3 + 5 + \ldots + 45000 = \dfrac{45000(45000+1)}{2} = 1012522500$

6.5 Convergence des Suites arithmétiques

7 Les suites géométriques

7.1 Définition et vocabulaire

Définition :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique si et seulement si pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par la même constante q.
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n$ avec $q \in \mathbb{R}$

7.2 Différentes formules

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p, $p \in \mathbb{N}$
Formule 1 :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_p \times q^{n-p}}$$

Cas particuliers :
➠ Si le premier terme est u_0 alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n$
➠ Si le premier terme est u_1 alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Comment démontrer qu'une suite est géométrique ?
Pour démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, il faut étudier le quotient entre u_{n+1} et u_n. Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante (résultat indépendant de n).
Exemple :

7.3 Variations

➠ On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme u_p, $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_p \times q^{n+1-p}}{u_p \times q^{n-p}} = q$$

Conclusion :
Il y a deux cas à étudier :
Premier cas : Si u_p positif

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } q \geq 1\text{, alors } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}\\ \text{Si } 0 < q \leq 1\text{, alors } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}\end{array}}$$

Premier cas : Si u_p négatif

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } q \geq 1\text{, alors } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}\\ \text{Si } 0 < q \leq 1\text{, alors } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}\end{array}}$$

➠ On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q < 0$ et de premier terme u_p, $p \in \mathbb{N}$
Les termes de la suites sont alternativement positifs et négatifs, donc la suite n'est pas monotone.

7.4 Somme des p premiers termes

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1, $p \in \mathbb{N}$
On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n$
On cherche à calculer S_n en fonction de n.

Première étape Exprimons S_n en fonction de u_1

$$S_n = u_1 + q \times u_1 + q^2 \times u_1 + \ldots + q^{n-1}u_1$$

Deuxième étape Exprimons $q \times S_n$ en fonction de u_1

$$q \times S_n = q \times u_1 + q^2 \times u_1 + q^3 \times u_1 + \ldots + q^n u_1$$

Troisième étape Calculons $S_n - q \times S_n$:

$S_n - q \times S_n = u_1 - q^n \times u_1 = u_1(1 - q^n)$ donc $(1 - q)S_n = u_1(1 - q^n)$
donc on obtient :
➠ Si $q \neq 1$

$$\boxed{S_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

➠ Si $q = 1$

$$\boxed{S_n = nu_1}$$

Formule plus générale :

$$\boxed{S_n = \text{Premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q}}$$

Exemple :
$2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 2 \times \dfrac{1 - 2^n}{1 - 2} = -2(1 - 2^n)$
$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 1 \times \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = -(1 - 2^{n+1})$
Donc si on souhaite calculer la somme des multiples de 2 jusqu'à $4096 = 2^{12}$:
$1 + 2 + 3 + 5 + \ldots + 2^{12} = -(1 - 2^{13}) = 8191$

7.5 Convergence des Suites géométriques