Applications du Produit Scalaire
(En première S)

Dernière mise à jour : Mercredi 12 Décembre 2010

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2010-2011)

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1 Applications

1.1 Formule d'Al-Kashi

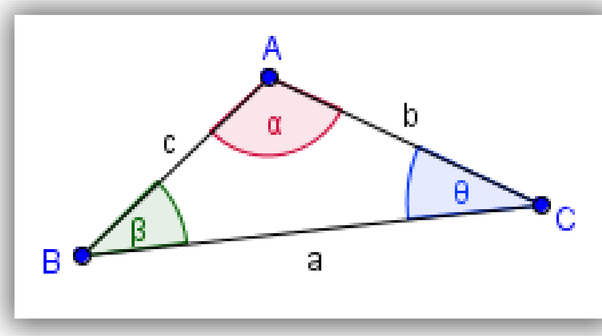

Figure 6

Théorème 1 (Al-Kashi XIV^{ime})

Si ABC est un triangle et si on note $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$,
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \beta$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \theta$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)$$

Démonstration :
Démontrons la première égalité :
$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$
donc $a^2 = b^2 + c^2 - 2AC \times AB \times \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$
Conclusion : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

1.2 Equation cartésienne d'une droite perpendiculaire à une autre

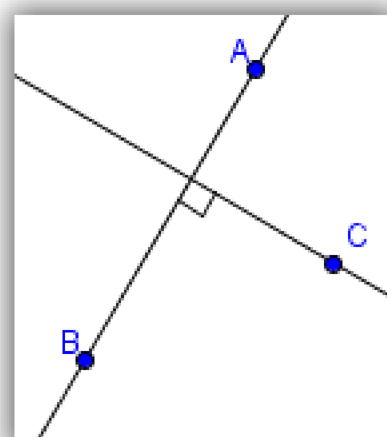

Figure 7

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note (AB) la droite passant par $A(x_A, y_B)$ et $B(x_B, y_B)$.
On souhaite trouver une équation de la droite Δ passant par $C(x_C, y_C)$ et perpendiculaire à (AB).
Si $M(x, y)$ est un point de la droite Δ alors $\overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Il reste donc à utiliser la formulation (5) du produit scalaire pour pouvoir trouver l'équation de la droite Δ.
$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (x - x_C)(x_B - x_A) + (y - y_C)(y_B - y_A) = 0$

1.3 Equation cartésienne d'un cercle

On note $\mathcal{C}$ un cercle dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$et on souhaite trouver l'équation du cercle. C'est à dire la relation entre les abscisses et les ordonnées de tous les points sur le cercle.
Il y a deux cas possibles :

1. Connaissant le centre et le rayon de $\mathcal{C}$
2. Connaissant les coordonnées de deux points diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$

1.3.1 Connaissant le centre et le rayon

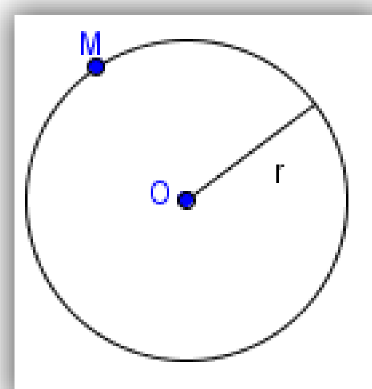

Figure 8

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $O(x_O, y_O)$ et de rayon r. On note $M(x, y)$ un point de $\mathcal{C}$.
Si $M \in \mathcal{C}$ alors $OM = r$ et donc $OM^2 = r^2$
On obtient donc $\boxed{(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = r^2}$ que l'on nomme une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

1.3.2 Connaissant deux points diamétralement opposés

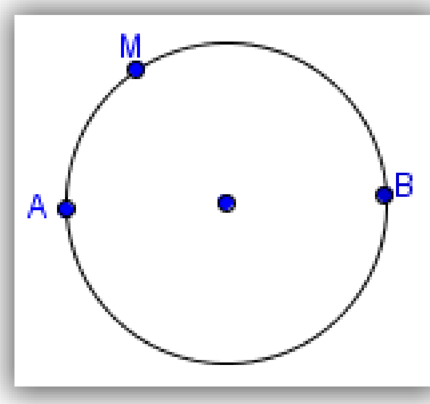

Figure 9

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. On note $M(x, y)$ un point quelconque sur le cercle.
Si $M \in \mathcal{C}$ alors $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
d'où $\boxed{(x_A - x)(x_B - x) + (y_A - y)(y_B - y) = 0}$ que l'on nomme une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

1.4 Formule de la médiane

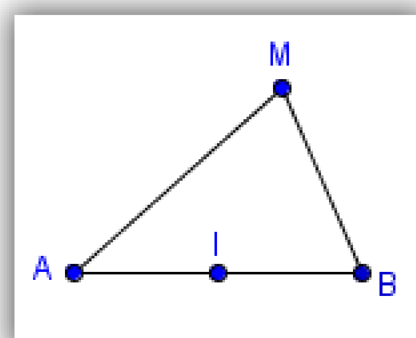

Figure 10

Théorème (Médiane)

Si MAB est un triangle et I le milieu de $[AB]$ alors

(1) $\qquad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

(2) $\qquad MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$

(3) $\qquad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - IB^2 = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

Démonstration :(Formule 1)
$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 =$
$MI^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + MI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$
or $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$
donc $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + 2\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$
donc $\boxed{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2}$

Démonstration :(Formule 2)
$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$
$= MI^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - MI^2 - IB^2 - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$
donc $\boxed{MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}}$

Démonstration :(Formule 3)
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$
or $\overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{MI}$ donc
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = MI^2 + IA \times IB \times \cos(\pi + 2k\pi)$
donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA \times IB = MI^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)\left(\frac{1}{2}AB\right) = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ d'où

$\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2}$

1.5 Lignes de niveau

1.5.1 Lignes de niveau du type $MA^2 + MB^2 = k$

On souhaite trouver l'ensemble des points M connaissant A, B et $k \in \mathbb{R}$ tels que $MA^2 + MB^2 = k$.
Pour cela on utilise la formule (1) du théorème de la médiane. On nomme I le milieu de $[AB]$ et donc d'après le théorème de la médiane on a $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$ donc

$MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = k$
$\Leftrightarrow 2MI^2 = k - \frac{1}{2}AB^2 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}k - \frac{1}{4}AB^2$
➠ Premier cas : Si $\frac{1}{2}k - \frac{1}{4}AB^2 < 0$ alors il n'y a aucun point M possible donc $E_M = \emptyset$
➠ Deuxième cas :Si $\frac{1}{2}k - \frac{1}{4}AB^2 > 0$ on note $\lambda = \frac{1}{2}k - \frac{1}{4}AB^2$ donc il faut trouver M tel que $MI^2 = \lambda \Leftrightarrow MI = \sqrt{\lambda}$ ou $MI = -\sqrt{\lambda}$ mais la deuxième solution est impossible en géométrie donc $MI = \sqrt{\lambda}$
L'ensemble des points M est donc le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}k - \frac{1}{4}AB^2}$.
➠ Troisième cas :Si $\frac{1}{2}k - \frac{1}{4}AB^2 = 0$ alors $MI^2 = 0$ donc $MI = 0$. On a donc $E_M = \{I\}$

1.5.2 Lignes de niveau du type $MA^2 - MB^2 = k$

On souhaite trouver l'ensemble des points M connaissant A, B et $k \in \mathbb{R}$ tels que
$MA^2 - MB^2 = k$.
Pour cela on utilise la formule (2) du théorème de la médiane. On nomme I le milieu de $[AB]$ et donc d'après le théorème de la médiane on a $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$ donc
$MA^2 - MB^2 = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = k$
$2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}k \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}k$
On note H le point de (AB) tel que $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}k$
On a alors $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IH}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
Donc l'ensemble des points M est sur la droite perpendiculaire à (AB) et passant par H.
De plus à l'aide de $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}k$ on peut placer le point H sur la droite (AB).

1.5.3 Lignes de niveau du type $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

On souhaite trouver l'ensemble des points M connaissant A, B et $k \in \mathbb{R}$ tels que
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.
Pour cela on utilise la formule (3) du théorème de la médiane. On nomme I le milieu de $[AB]$ et donc d'après le théorème de la médiane on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ donc
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{1}{4}AB^2$
➠ Premier cas : Si $k + \frac{1}{4}AB^2 < 0$ alors il n'y a pas de solution : $E_M = \emptyset$
➠ Deuxième cas :Si $k + \frac{1}{4}AB^2 > 0$ alors on pose $\lambda = k + \frac{1}{4}AB^2$

On a donc $MI^2 = \lambda \Leftrightarrow MI = \sqrt{\lambda}$ ou $MI = -\sqrt{\lambda}$ la deuxième solution étant impossible en Géométrie, on obtient $MI = \sqrt{\lambda}$
Donc l'ensemble des points M est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\lambda}$.
➠ Troisième cas :$k + \frac{1}{4}AB^2 = 0$ alors $MI = 0$ donc $E_M = \{I\}$

1.6 De nouvelles formules en trigonométrie

1.6.1 Formules d'addition

Théorème 3 (Formules d'addition)

$\forall a\mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$ on a

(1) $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ (2) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

(3) $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ (4) $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

Démonstration :

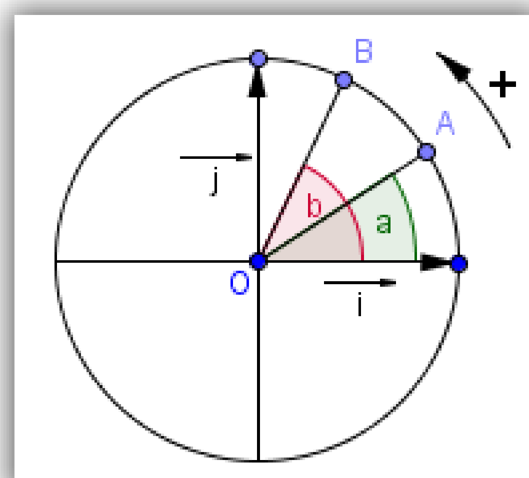

Figure 11

➠ Démontrons la formule (1) :
Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ de deux façons différentes :

- A l'aide des coordonnées :
  On a $\overrightarrow{OA}(\cos(a);\sin(a))$ et $\overrightarrow{OB}(\cos(b);\sin(b))$
  donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = x_{\overrightarrow{OA}} \times x_{\overrightarrow{OB}} + y_{\overrightarrow{OA}} \times y_{\overrightarrow{OB}} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- A l'aide du $\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$:
  $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$
  or $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{i}) + (\overrightarrow{i},\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{i},\overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{i},\overrightarrow{OA}) = b - a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
  donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(a-b) = \cos(b-a)$

Conclusion : $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$ on a $\cos(b-a) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

➠ Démontrons la formule (2) :
Il suffit de reprendre la formule (1) en remplaçant b par $-b$.
$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

➠ Démontrons la formule (3) :
D'après le chapitre précédent, on a $\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right)$
donc $\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

➠ Démontrons la formule (4) :
Il suffit de reprendre la formule (3) en remplaçant b par $-b$.
Alors
$\sin(a+b) = \sin(a-(-b)) = \sin(a)\cos(-b) - \cos(a)\sin(-b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

1.6.2 Formules de linéarisation

Dans les formules (2) et (4) précédentes, si on remplace b par a on obtient :

1. $\boxed{\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)}$
2. $\boxed{\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)}$

1.6.3 Formules de duplication

1. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a)) = 2\cos^2(a) - 1$
   donc $2\cos^2(a) = \cos(2a) + 1$ d'où $\boxed{\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}}$
2. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - \sin^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a)$
   donc $2\sin^2(a) = 1 - \cos(2a)$ d'où $\boxed{\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}}$

1.7 Autres formules à connaître

1.7.1 Aire d'un triangle

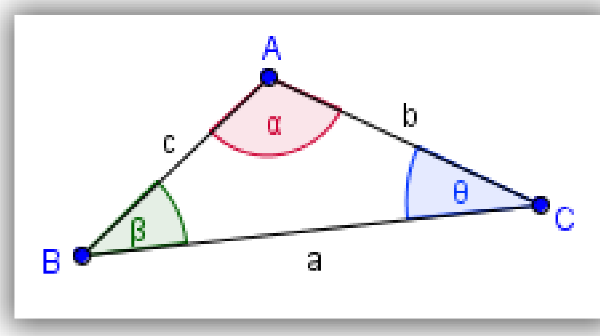

Figure 12

On note S la surface du triangle ci-dessus, alors :

$$S = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$$

$$S = \frac{1}{2}ac\sin(\beta)$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin(\theta)$$

Démonstration :
➠ Démontrons la troisième formule :
Si $\widehat{ACH}$ est aigu :
On sait que $S = \frac{1}{2}BC \times AH$
Or dans le triangle AHC rectangle en H on a AH=AC× $\sin(\theta)$ donc $S = \frac{1}{2}ab\sin(\theta)$
Si $\widehat{ACH}$ est obtu :
On a $\sin(\widehat{ACH}) = \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
donc on obtient la même formule.

1.7.2 Formule des sinus

Propriété

Dans le triangle ci-dessus, on a :

$$\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\theta)}$$

Démonstration :
On sait d'après le paragraphe précédent que :
$S = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) = \frac{1}{2}ac\sin(\beta) = \frac{1}{2}ab\sin(\theta)$
En multipliant les égalités par $\frac{2}{abc}$ puis en prenant l'inverse, on obtient les bonnes formules.