Le Produit Scalaire

(En première S)

Dernière mise à jour : Mercredi 12 Décembre 2010

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2010-2011)

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1 Définition et Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.

1.1 Définition du produit scalaire

Déinition 1

> On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :
> $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \parallel \overrightarrow{u} \parallel \times \parallel \overrightarrow{v} \parallel \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$

Remarque :
➠ Si l'un des vecteurs est nul alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

1.2 Produit scalaire et commutativité

Propriété 1

> $\forall \overrightarrow{u}, \forall \overrightarrow{v}$ on a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$

Démonstration :
$\forall \overrightarrow{u}, \forall \overrightarrow{v}$ on a $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \cos(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}})$
donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \parallel \overrightarrow{u} \parallel \times \parallel \overrightarrow{v} \parallel \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \parallel \overrightarrow{v} \parallel \times \parallel \overrightarrow{u} \parallel \times \cos(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}}) = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$

1.3 Produit scalaire et vecteurs colinéaires

Propriété 2

> On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.
>
> Si $\lambda > 0$ ($\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le même sens) alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \parallel \overrightarrow{u} \parallel \times \parallel \overrightarrow{v} \parallel$
>
> Si $\lambda < 0$ ($\overrightarrow{u}$ dans le sens contraire de $\overrightarrow{v}$) alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = - \parallel \overrightarrow{u} \parallel \times \parallel \overrightarrow{v} \parallel$

Démonstration :
On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.

➠ Si $\lambda > 0$ alors $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = 1$ donc
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \|$

➠ Si $\lambda < 0$ alors $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = -1$ donc
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = - \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \|$

1.4 Produit scalaire et vecteurs orthogonaux

Propriété 3

> Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls, alors $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Démonstration :
➠ $(\Rightarrow)$:
Si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ alors $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = 0$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ ➠
$(\Leftarrow)$:
Si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, $\| \overrightarrow{u} \| \neq 0$ et $\| \overrightarrow{v} \| \neq 0$
alors $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = 0$ donc $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$

Remarque :
Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ alors $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}}) = 1$ donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \| \overrightarrow{u} \|^2$

Définition 2

> On nomme **carré scalaire de** $\overrightarrow{u}$ le nombre réel noté $\overrightarrow{u}^2$ tel que
> $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \| \overrightarrow{u} \|^2$

2 Interprétation géométrique

On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
Soient O, A et B trois points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$

2.1 Définition géométrique du produit scalaire

Définition 3 (Autre définition du produit scalaire)

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$$

où $\overrightarrow{OH}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{OB}$ sur (OA)

Démonstration :

➠ Premier cas :

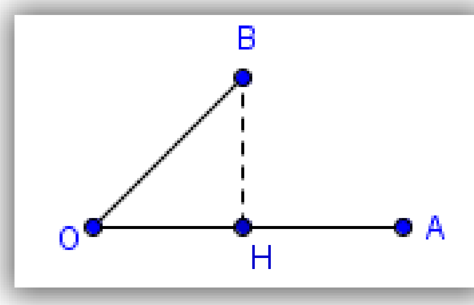

Figure 1

Dans le triangle OHB rectangle en H on a : $\cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \cos(\widehat{HOB}) = \dfrac{OH}{OB}$

d'où $OB \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = OH$

donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = OA \times OH = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$

donc

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$$

➠ Deuxième cas :

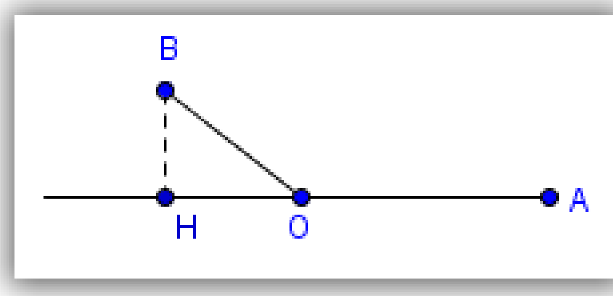

Figure 2

Dans le triangle HOB rectangle en H on a : $\cos(\widehat{\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OB}}) = \cos(\widehat{HOB}) = \dfrac{OH}{OB}$
or $\widehat{HOB} = \pi - \widehat{AOB}$ d'où $\cos(\pi - \widehat{AOB}) = \dfrac{OH}{OB} = -\cos(\widehat{AOB})$ [Rappel : $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$]
donc $OB \times \cos(\widehat{AOB}) = -OH$
donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = OA \times (-OH) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$
donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$

2.2 Retour aux propriétés du produit scalaire

2.3 Remarques et exemples

➠ Propriété n° 3 :
Si $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ alors le projeté orthogonal de B sur (OA) est 0 donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$
➠ Propriété n° 1 :

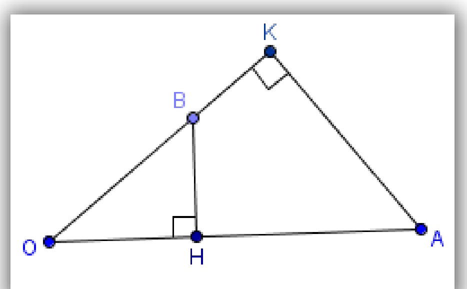

Figure 3

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OK}$ donc d'après la propriété 1 on a
$\boxed{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OK}}$

Première remarque :
2

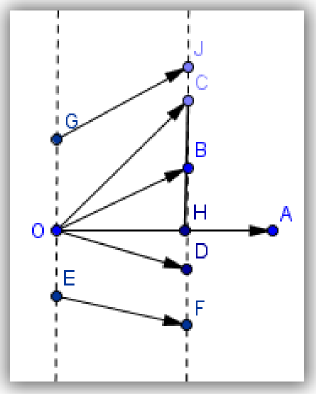

Figure 4

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}\\&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\\&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}\\&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{EF}\\&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{GJ}\end{aligned}$$

3 Produit scalaire et opérations

3.1 Distributivité du produit scalaire

Propriété 4 (A admettre)
On note $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs.

$$\boxed{\begin{array}{l}(1)\ \overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}\\(2)\ (\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}\end{array}}$$

3.2 Linéarité du produit scalaire

Propriété 5
On note $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et α un réel

$$(1)\ \overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v})=\alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$$
$$(2)\ (\alpha\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v}=\alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$$

Démonstration :
Démontrons que $\overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v})=\alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v})$
$=\parallel\overrightarrow{u}\parallel\times\parallel\alpha\overrightarrow{v}\parallel\cos(\overrightarrow{u},\alpha\overrightarrow{v})$
$=\parallel\overrightarrow{u}\parallel\times|\alpha|\parallel\overrightarrow{v}\parallel\cos(\overrightarrow{u},\alpha\overrightarrow{v})$
$=|\alpha|\parallel\overrightarrow{u}\parallel\times\parallel\overrightarrow{v}\parallel\cos(\overrightarrow{u},\alpha\overrightarrow{v})$
Il faut maintenant envisager trois cas :
➠ Si $\alpha>0$ alors $|\alpha|=\alpha$ et $\cos(\overrightarrow{u},\alpha\overrightarrow{v})=\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$
donc
$\overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v})=\alpha\parallel\overrightarrow{u}\parallel\parallel\overrightarrow{v}\parallel\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$
d'où : $\overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v})=\alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v})$
➠ Si $\alpha<0$ alors $|\alpha|=-\alpha$ et $\cos(\overrightarrow{u},\alpha\overrightarrow{v})=\cos(\pi+(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}))=-\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$
donc
$\overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v})$
$=-\alpha\parallel\overrightarrow{u}\parallel\parallel\overrightarrow{v}\parallel[-\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})]$
$=\alpha\parallel\overrightarrow{u}\parallel\parallel\overrightarrow{v}\parallel\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$
$=\alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
➠ Si $\alpha=0$ alors $|\alpha|=0$
donc $\overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{0}=0$
et $\alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$
donc $\overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v})=\alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$

La démonstration de $(\alpha\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v}=\alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ est identique.

3.3 Autres définitions du produit scalaire

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.
Propriété 5

$$(1)\ \parallel\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\parallel^2=\parallel\overrightarrow{u}\parallel^2+\parallel\overrightarrow{v}\parallel^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$$

$$(2)\ \parallel\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\parallel^2=\parallel\overrightarrow{u}\parallel^2+\parallel\overrightarrow{v}\parallel^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$$

$$(3)\ (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=\parallel\overrightarrow{u}\parallel^2-\parallel\overrightarrow{v}\parallel^2$$

Démonstration :
(1)
$\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{v}$
donc $\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}$
alors $\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \| \overrightarrow{v} \|^2$
(2)
$\| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|^2 = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{u} - (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{v}$
donc $\| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}$
alors $\| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \| \overrightarrow{v} \|^2$
(3)
$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \|^2 - \| \overrightarrow{v} \|^2$
A l'aide des formules (1) et (2) nous pouvons définir le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de la façon suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left[\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{u} \|^2 - \| \overrightarrow{v} \|^2\right] \\ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left[\| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|^2\right] \end{aligned}}$$

4 Expression analytique du produit scalaire

$(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère orthonormal et les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$

4.1 Coordonnées d'un vecteur

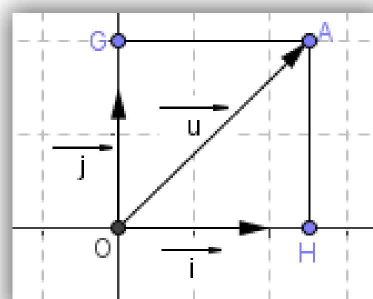

Figure 5

On a $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{i} \cdot x_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{i} = x_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = x_{\overrightarrow{u}}$

et
$\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{j} \cdot y_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{j} = y_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = y_{\overrightarrow{u}}$
Conclusion :

$$\boxed{\text{Les coordonnées du vecteur } \overrightarrow{u} \text{ sont } (\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{u} ; \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{u})}$$

4.2 Expression analytique d'un produit scalaire

Propriété 6

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x \times x' + y \times y'}$$

Démonstration :
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}) \cdot (x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}) = x\overrightarrow{i} \cdot x\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{i} \cdot y'\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{j} \cdot x'\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} \cdot y'\overrightarrow{j}$
$= xx' \parallel \overrightarrow{i} \parallel^2 + xy'\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} + yx'\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} + yy' \parallel \overrightarrow{j} \parallel^2$
or $\parallel \overrightarrow{i} \parallel = \parallel \overrightarrow{j} \parallel = 1$ et $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0$ car $\overrightarrow{i} \perp \overrightarrow{j}$
donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$

5 Les différentes expressions du produit scalaire

Voilà donc les différentes expressions que l'on peut utiliser pour exprimer le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

(1) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \parallel \overrightarrow{u} \parallel \times \parallel \overrightarrow{v} \parallel \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$

(2) Si $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$
avec $\overrightarrow{OH}$ le projeté orthogonal de $\overrightarrow{OB}$ sur (OA)

(3) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\parallel \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \parallel^2 - \parallel \overrightarrow{u} \parallel^2 - \parallel \overrightarrow{v} \parallel^2\right]$

(4) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\parallel \overrightarrow{u} \parallel^2 + \parallel \overrightarrow{v} \parallel^2 - \parallel \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \parallel^2\right]$

(5) Dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ si les vecteurs ont pour coordonnées $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$