Les fonctions de référence

(En première S)

Dernière mise à jour : Jeudi 01 Septembre 2010

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2006-2007)

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1 Objectifs

L'objectif de ce chapitre et de maîtriser parfaitement les fonctions polynômes du second degré, différentes formes, racines du polynôme, signes du polynômes, tableaux des variations et courbes représentative. il faut ensuite savoir utiliser ces nouvelles connaissances dans des exercices plus complets et en ayant encore vos connaissances de seconde sur les fonctions de référence.

2 Les fonctions affines (2nde)

2.1 Définition

Les fonctions affines sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{f : x \longmapsto ax + b \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R}}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Exemples :

1. $f : x \longmapsto 2x + 3$
2. $f : x \longmapsto 4 - 5x$
3. $f : x \longmapsto \dfrac{4x + 7}{3}$
4. $f : x \longmapsto \pi x - 5$
5. $f : x \longmapsto 3\sqrt{5}x + 7$

Vocabulaire :
On nomme a le **coefficient directeur** de $\mathcal{C}_f$, ou le **taux de variation** de f ou **la pente** de $\mathcal{C}_f$.
Remarques :

1. Pour tout x_1 et x_2 réelles tels que $x_1 \neq x_2$, on a : $\boxed{a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$
2. Si A et B sont deux points distincts de $\mathcal{C}_f$ alors : $\boxed{a = \dfrac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}}$
3. $\mathcal{C}_f$ passe par le point $(0; b)$

2.2 Domaine de définition

$f(x)$ existe pour toutes les valeurs de x réelles. Donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2.3 Tableau des signes

$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b$ or $a \neq 0$ donc on peut diviser par a.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$.
On dit que $x = -\dfrac{b}{a}$ est **la solution** de $f(x) = 0$ ou **la racine** de f.

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		Signe opposé de a	0	Signe de a	

2.4 Tableau des variations

Les variations des fonctions affines dépendent du signe du taux de variation a.
Si a est positif :

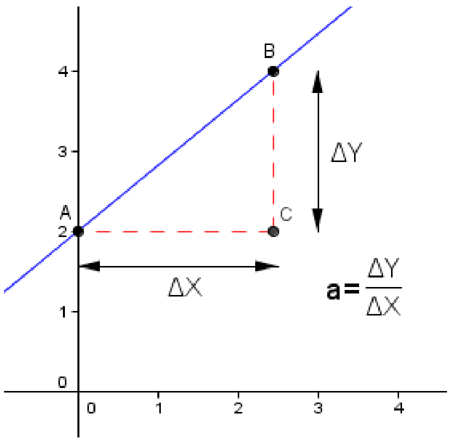
x	$-\infty$		$+\infty$
f		$\nearrow$	

Si a est négatif :

x	$-\infty$		$+\infty$
f		$\searrow$	

2.5 Représentations graphiques

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite. Elle passe par le point $(0, b)$ et son coefficient directeur donne la direction.



3 Les fonctions du second degré (2nde et 1ère)

3.1 Définition

Les fonctions polynômes du second degré sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{f : x \longmapsto ax^2 + bx + c \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \ , \ b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Exemples :

1. $f : x \longmapsto x^2$
2. $f : x \longmapsto 4x^2 + 5x - 7$

3. $f : x \longmapsto 4(x-2)^2+5$
4. $f : x \longmapsto -3(x-1)(2+x)$
5. $f : x \longmapsto (x+1)^3 - x^3$
6. $f : x \longmapsto \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$

3.2 Domaine de définition

$f(x)$ existe pour toutes les valeurs de x réels donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

3.3 Les différentes formes

Les fonctions polynômes du second degré peuvent avoir plusieurs formes :

1. Forme développer : $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$
2. Forme factorisée : $f : x \longmapsto a(x-x_1)(x-x_2)$
3. Forme canonique : $f : x \longmapsto a(x-\alpha)^2+\beta$

Vous devez êtres capable de passer de l'une à l'autre sans problème.
Vocabulaire :
On note **Racines du polynômes f**, les réels vérifiant :

$$f(x) = 0$$

.
Exemple :
On note $f : x \mapsto 2x^2-4x-6$ une fonction polynômes du second degré.
Pour toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$,
$f(x) = \boxed{2x^2-4x-6} = 2(x^2-2x-3) = 2\left[(x-1)^2-1-3\right]$
$= 2\left[(x-1)^2-4\right] = \boxed{2(x-1)^2-8}$
$= 2\left[(x-1)^2-4\right] = 2\left[(x-1)^2-(2)^2\right] = 2[(x-1)-2][(x-1)+2]$
$= 2(x-1-2)(x-1+2) = \boxed{2(x-3)(x+1)}$

$f(x) = 0 \Longleftrightarrow 2(x-3)(x+1) = 0 \Longleftrightarrow x = 3$ ou $x = -1$
Les racines de $f(x)$ sont 3 et -1.
Les solutions de $f(x) = 0$ sont 3 et -1.

3.4 Racines du polynômes

Les racines d'un polynômes f sont les réels x vérifiant $f(x) = 0$. Ce sont les solutions de l'équations $f(x) = 0$.
Approche théorique de la recherche des racines de $f(x)$:
$f(x) = ax^2+bx+c$

On factorise par a car $a \neq 0$ et donc $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

$x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début d'une identité remarquable :

$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

On peut donc remplacer $x^2 + \frac{b}{a}x$ par $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

donc

$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$

$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$

$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

On nomme maintenant $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ **le discriminant du polynôme** $f(x)$.

Alors

$$\boxed{f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}$$

Peut-on factoriser la partie $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$?

Il y a trois cas possibles :

1. Si $\Delta = 0$ c'est déja factorisé !
2. Si $\Delta > 0$ alors on peut factoriser à l'aide d'une identité remarquable.
3. Si $\Delta < 0$ alors on ne peut pas factoriser dans $\mathbb{R}$.

Etudions les deux cas possibles :

1. Si $\Delta = 0$:

   $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right)$

   $f(x) = 0$

   $\Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$

   $\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0$

   $\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

   Donc la racine de $f(x)$ est l'unique réel $x = -\frac{b}{2a}$

2. Si $\Delta > 0$:

$f(x) = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$

$f(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$f(x) = a\left(x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$f(x) = a\left(x-\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$f(x) = 0$

$\Leftrightarrow x - \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ ou $x - \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Il y a donc deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Conclusion : (A connaître par coeur)

On note $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$:

1. Si $\Delta = 0$ alors il y a une seule racine $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$ et $f(x) = a(x - x_1)^2$
2. Si $\Delta > 0$ alors il y a deux racines réels distinctes $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
3. Si $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de racine réelle. Attention cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de racine du tout, mais elles ne sont pas dans $\mathbb{R}$.(Voir terminale)

3.5 Tableau des signes

On note $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$. Étudions le signe de $f(x)$ suivant le signe de Δ :

1. Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$

   Dans $\mathbb{R}$ le réel $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ est toujours positif donc le signe de $f(x)$ est le même que celui de a.

   Conslusion :

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

2. Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a\left(x - \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

   Si on note $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
   alors $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x-x_1)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x-x_2)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
a		Signe de a	|	Signe de a	|	Signe de a	
$f(x)$		Signe de a	0	Signe opposé de a	0	Signe de a	

3. Si $\Delta < 0$ alors $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

   et donc $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2}\right]$

   Dans les crochets, tous les nombres sont positifs dans $\mathbb{R}$ donc $f(x)$ est du signe de a et ne s'annule pour aucun réel.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	

Conclusion : (A connaître par coeur)

On note $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$:

1. Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

2. Si $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x-x_1)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x-x_2)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
a		Signe de a	|	Signe de a	|	Signe de a	
$f(x)$		Signe de a	0	Signe opposé de a	0	Signe de a	

3. Si $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	

3.6 Tableau des variations

Ce paragraphe a déjà été abordé en seconde donc je vais redonner les résultats.
On utilise la forme canonique :

$$f : x \longmapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$$

où d'après les paragraphes précédents :

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - a\times\frac{\Delta}{4a^2} = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Il y a deux cas à prévoir : Soit $a>0$ ou $a<0$

Résultats de seconde : (A connaître par coeur)

1. Si $a>0$:

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			$-\sqrt{\Delta}/4a$		

$\frac{\sqrt{\Delta}}{4a}$ est donc le minimum de f atteint pour $x = -\frac{b}{2a}$

2. Si $a<0$:

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
			$-\sqrt{\Delta}/4a$		
f		$\nearrow$		$\searrow$	

$\frac{\sqrt{\Delta}}{4a}$ est donc le maximum de f atteint pour $x = -\frac{b}{2a}$

3.7 Représentations graphiques

Ce paragraphe aussi est un résultat de seconde. La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabole tournée vers le haut ou vers le bas et dont le sommet est donné par la forme canonique :

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Résultats de seconde : (A connaître par coeur)

1. Si $a>0$ alors $\mathcal{C}_f$ est une parabole tournée vers le haut et de sommet
$$S\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$$
2. Si $a<0$ alors $\mathcal{C}_f$ est une parabole tournée vers le bas et de sommet
$$S\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$$

3.8 Différentes équations

Nous allons appliquer maintenant nos nouvelles connaissances pour résoudre des équations plus complexes.
Nous utiliserons pour beaucoup la méthode du changement de variable.

3.8.1 Equations bicarrées

Les équations bicarrées sont de la forme : $ax^4 + bx^2 + c = 0$
On utilise le changement de variable $t = x^2$ et on remplace x^2 par t dans l'équation :
On obtient alors l'équation : $at^2 + bt + c = 0$! ! Oh, une équation connue ...
Il suffit de trouver les racines de $at^2 + bt + c$ pour trouver les valeurs de t puis ensuite à l'aide de l'équation $x^2 = t$ d'obtenir les valeurs de x.
Exemple :
Résoudre l'équation : $2x^4 + 2x^2 - 24 = 0$ ou trouver les racines de $2x^4 + 2x^2 - 24$
On pose le changement de variable $x^2 = t$
On obtient donc l'équation : $2t^2 + 2t - 24 = 0$
Calculons le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(2)(-24) = 4 + 192 = 196 = 14^2$
$\Delta > 0$ donc d'après le cours il y a deux racines réelles disctinctes :
$t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 + 14}{4} = 3$
et
$t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 - 14}{4} = -4$
Il reste donc à résoudre les deux équations :

1. $x_1^2 = t_1 \Leftrightarrow x_1^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$
2. $x_2^2 = t_2 \Leftrightarrow x_2^2 = -4$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

Conclusion : les solutions sont $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

3.8.2 Autres équations

Exemple 01 :
On souhaite résoudre l'équation : $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x} - 5 = 0$ sur $\mathbb{R}^*$ pour que $x \neq 0$.
On pose le changement de variable $\dfrac{1}{x} = t$
On obtient donc l'équation : $t^2 + 4t - 5 = 0$
Calculons le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(-5) = 16 + 20 = 36 = 6^2$
$\Delta > 0$ donc d'après le cours il y a deux racines réelles disctinctes :
$t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 + 6}{2} = 1$
et
$t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 - 6}{2} = -5$
Il reste donc à résoudre les deux équations :

1. $\dfrac{1}{x_1} = t_1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1} = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1$
2. $\dfrac{1}{x_2} = t_2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_2} = -5 \Leftrightarrow x_2 = -\dfrac{1}{5}$

Conclusion : les solutions sont $S = \left\{-\dfrac{1}{5}; 1\right\}$

Exemple 02 :

On souhaite résoudre l'équation : $t - \sqrt{t} - 12 = 0$ sur $\mathbb{R}^+$ pour que $x \geq 0$.
On pose le changement de variable $\sqrt{t} = x$
On obtient donc l'équation : $x^2 - x - 12 = 0$
Calculons le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-12) = 49 = 7^2$
$\Delta > 0$ donc d'après le cours il y a deux racines réelles disctinctes :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+7}{2} = 4$
et
$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-7}{2} = -3$
Il reste donc à résoudre les deux équations :

1. $\sqrt{t_1} = x_1 \Leftrightarrow \sqrt{t_1} = 4 \Leftrightarrow t_1 = 16$
2. $\sqrt{t_2} = x_2 \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = -3$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Conclusion : les solutions sont $S = \{16\}$

Exemple 03 :

On souhaite résoudre l'équation : $2Cos^2(\theta) - Cos(\theta) - 1 = 0$ sur $\mathbb{R}$.
On pose le changement de variable $Cos(\theta) = x$
On obtient donc l'équation : $2x^2 - x - 1 = 0$
Calculons le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 9 = 3^2$
$\Delta > 0$ donc d'après le cours il y a deux racines réelles disctinctes :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2}$
et
$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-3}{4} = -1$
Il reste donc à résoudre les deux équations :

1. $Cos(\theta_1) = x_1 \Leftrightarrow Cos(\theta_1) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \theta_1 = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $\theta_1 = -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$
2. $Cos(\theta_1) = x_2 \Leftrightarrow Cos(\theta_2) = -1 \Leftrightarrow \theta_2 = \pi[2\pi]$

Conclusion : les solutions sont $S = \left\{-\dfrac{\pi}{3}[2\pi]; \dfrac{\pi}{3}[2\pi]; \pi[2\pi]\right\}$

Exemple 04 :

On souhaite résoudre le système : $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-35 \end{cases}$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ (2-y)y=-35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ -y^2+2y+35=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ y^2 - 2y - 35 = 0 \end{cases}$

Il suffit de résoudre l'équation $y^2 - 2y - 35 = 0$ pour trouver les valeurs de y puis d'en déduire celles de x.

(A vous de continuer et ensuite de vérifier que les valeurs trouvées vérifient le système du départ.)

3.9 Différentes inéquations

A l'aide des tableaux de signes des polynômes du second degré, nous pouvons dresser le tableau des signes d'expressions plus complexes qu'en seconde, avec des facteurs qui seront des polynômes du second degré.

Exemple 01 :

On souhaite résoudre l'inéquation : $-3(x-1)(x^2+x-6) \leq 0$ sur $\mathbb{R}$.

-3 est un nombre négatif et ne s'annule pas.

$x-1$ est positif si x est plus grand que 1 et $x-1$ s'annule en 1

Étudions le signe de x^2+x-6.

Calculons le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25 = 5^2$

$\Delta > 0$ donc d'après le cours il y a deux racines réelles disctinctes :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-5}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$

On va pouvoir dresser le tableau des signes de l'expression

$P(x) = -3(x-1)(x^2+x-6)$, à l'aide des paragraphes précédents :

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
-3		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2+x-6		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-3;1] \cup [2;+\infty[$

4 Les fonctions homographiques (2nde)

4.1 Définition

Les fonctions homographiques sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{f : x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d} \text{ avec } ad - bc \neq 0 \text{ et } c \neq 0}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exemples :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
2. $f : x \longmapsto \dfrac{2x+3}{5x-1}$
3. $f : x \longmapsto 3 + \dfrac{2}{2x+3}$
4. $f : x \longmapsto 4 - \dfrac{7x}{4x-1}$

4.2 Domaine de définition

On note $f : x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$

$f(x)$ existe si et seulement si $cx + d \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{d}{c}$

Donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}}$

4.3 Tableau des signes

Pour dresser le tableau des signes de $f(x)$ il faut dresser un tableau avec le signe du numérateur, celui du dénominateur et ne pas oublier de marquer la valeur interdite.

Exemple 01 :

On souhaite dresser le tableau des signes de $f(x) = \dfrac{2x-4}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\triangleright$ $2x - 4 \geq \Leftrightarrow x \geq 2$

$\triangleright$ $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

x	$-\infty$		1		2		∞
$2x-4$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$1-x$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

4.4 Les différentes formes

Résultats de seconde à connaître par coeur :

Toutes les fonctions homographiques peuvent se mettre sous la forme :

$$f(x) = \alpha + \frac{\beta}{cx+d}$$

Exemple 01 :

On souhaite mettre $f(x) = \dfrac{2x-4}{1-x}$ sous la forme $f(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{cx+d}$

Méthode 01 : Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$f(x)=\frac{2x-4}{1-x}=\frac{-2(1-x)-2}{1-x}=\frac{-2(1-x)}{1-x}-\frac{2}{1-x}=-2-\frac{2}{1-x}$$

Méthode 02 : Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$\alpha+\frac{\beta}{1-x}=\frac{\alpha(1-x)+\beta}{1-x}=\frac{-\alpha x+\alpha+\beta}{}$$

En identifiant avec l'expression : $f(x)=\dfrac{2x-4}{1-x}$

On obtient le système :

$$\begin{cases}-\alpha=2\\ \alpha+\beta=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=-4-\alpha=-4+2=-2\end{cases}\quad \text{donc } f(x)=-2-\frac{2}{1-x}$$

4.5 Tableau des variations

Résultats de seconde à connaître par coeur :
Pour dresser le tableau des variations des fonctions homographiques, on utilise la forme :

$$f(x)=\alpha+\frac{\beta}{cx+d}$$

et la règle suivante :

1. Si $\beta c>0$ alors le tableau des variations est le suivant :

x	$-\infty$		$-d/c$		$+\infty$
f		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

2. Si $\beta c<0$ alors le tableau des variations est le suivant :

x	$-\infty$		$-d/c$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	

Nous demontrerons une des deux règles en classe ....

5 Une nouvelle fonction : Valeur absolue

5.1 Valeur absolue

5.1.1 Définition

La fonction valeur absolue est une fonction de la forme :

$$\boxed{f:x\longmapsto|x|=\text{Distance de } x \text{ à } 0}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
Exemple 01 :
▷ $f(2)=|2|=2$
▷ $f(-2)=|-2|=2$
Nous pouvons donner une autre définition à cette fonction :

$$f : x \longmapsto |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

5.1.2 Domaine de définition

$f(x)$ existe pour toutes les valeurs de x réelles, donc $\boxed{\mathbb{D}_f = \mathbb{R}}$

5.1.3 Différentes formes

On a vu ci-dessus, que $|x|$ peut s'écrire sans les barres mais avec deux expressions. On peut trouver des expressions qui traduisent une valeurs absolue, de la manière suivante :

Exemple 01 :

$$f(x) = |3x - 12| = \begin{cases} 3x - 12 \text{ si } 3x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4 \\ -3x + 12 \text{ si } 3x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 4 \end{cases} = \begin{cases} 3x - 12 \text{ si } x \geq 4 \\ -3x + 12 \text{ si } x \leq 4 \end{cases}$$

Exemple 02 :

$f(x) = |2x + 4| + |x - 1|$

On décompose en deux :

$$|2x + 4| = \begin{cases} 2x + 4 \text{ si } x \geq -2 \\ -2x - 4 \text{ si } x \leq -2 \end{cases}$$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 \text{ si } x \geq 1 \\ -x + 1 \text{ si } x \leq 1 \end{cases}$$

On utilise ensuite un tableau pour faire la somme :

x	$-$		-2		1		$-\infty$
$2x+4$		$-2x-4$	0	$2x+4$	|	$2x+4$	
$x-1$		$-x+1$	|	$-x+1$	0	$x-1$	
$f(x)$		$-3x-3$		$x+5$		$3x+3$	

Conslusion :

$$f(x) = |2x + 4| + |x - 1| = \begin{cases} -3x - 3 \text{ si } x \in]-\infty; -2] \\ x + 5 \text{ si } x \in]-2; 1] \\ 3x + 3 \text{ si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

5.1.4 Signe

Comme $||$ est une distance alors elle est toujours positive sur $\mathbb{R}$.

5.1.5 Variations

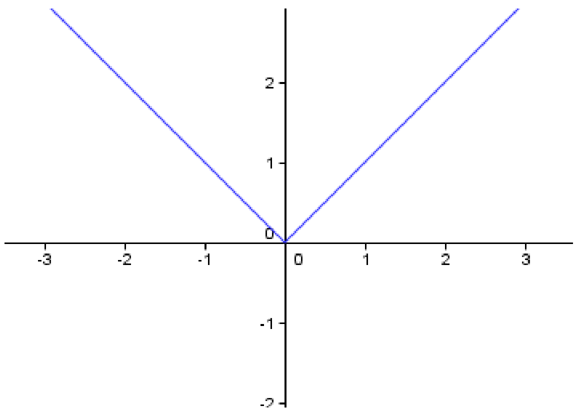
Résultats à connaître par coeur :

Le tableau des variations de la fonction valeur absolue, est :

x	$-\infty$		0		$+$
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			0		

5.1.6 Représentation graphique

La représentation graphqiue de la fonction valeur absolue est constituée de deux demi-droites, celle d'équation $y = -x$ pour $x \in]-\infty; 0]$ et celle d'équation $y = x$ pour $x \in [0; +\infty[$.



6 Applications

A suivre ...