Angles orientés
et
fonctions circulaires

(En première S)

Dernière mise à jour : Jeudi 01 Septembre 2010

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2006-2007)

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Table des matières

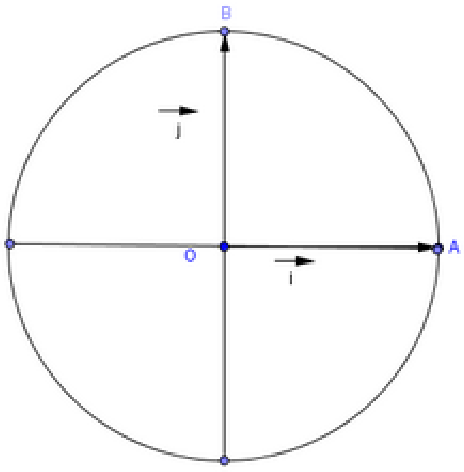
1 Objectifs

L'objectif de ce chapitre et de savoir utiliser l'unité des radians qui est l'unité internationale de la mesure des angles. De maîtriser les formules de calcul sur les angles orientés de vecteurs, de découvrir et utiliser les formules de trigonométrie et de découvrir les coordonnées polaires.

2 Mesure d'un angle en radian

2.1 Le cercle trigonométrique

Soit un cercle de rayon 1 et de centre O.
Soient A et B deux points du cercle tels que $(OA) \perp (OB)$
On définit alors un repère $(O, \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$ tel que $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OB}$

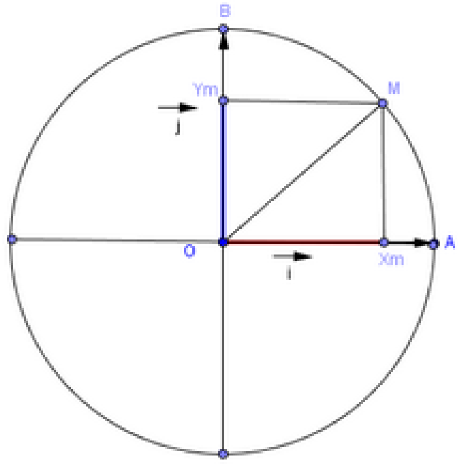


2.2 Comment repérer un point sur ce cercle ?

Il y a au moins trois façons de repérer un point M sur le cercle.

- ➠ Par ses coordonnées dans le repère $(O, \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$.
- ➠ Par la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$ en degrés.
- ➠ Par la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AM}$.

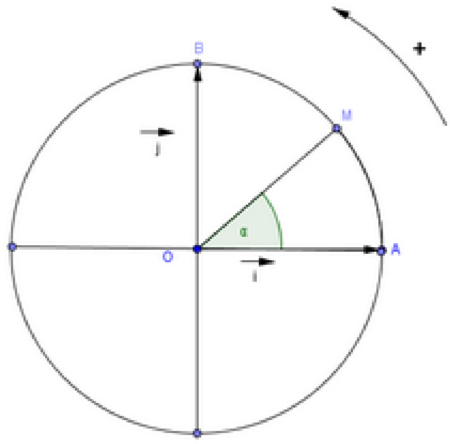
– <u>Les coordonnées du point M</u> :
En connaissant les coordonnées $M(x_m; y_m)$ on peut placer ce point dans le repère $(O, \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$.



Remarque : $\boxed{OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}}$

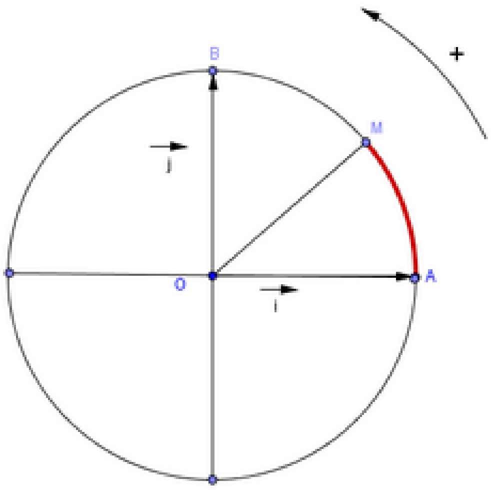
– La mesure de l'angle $\widehat{AOM}$ en degrés :

En connaissant la mesure de l'angle $\widehat{AOM} = \alpha^\circ$ ($\alpha \geq 0$) on peut placer ce point dans le repère mais il y a deux possibilités. Pour éviter d'avoir ce problème, on va orienter le cercle et lui donner un sens positif.
Sens positif (Direct) : Sens inverse des aiguilles d'une montre
Sens négatif (Indirect) : Sens des aiguilles d'une montre



– La longueur de l'arc de cercle $\widehat{AM}$:

En connaissant la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AM} = \alpha$ ($\alpha \geq 0$) on peut placer ce point dans le repère mais il y a deux possibilités. Pour éviter d'avoir ce problème, on va orienter le cercle et lui donner un sens positif.
Sens positif (Direct) : Sens inverse des aiguilles d'une montre
Sens négatif (Indirect) : Sens des aiguilles d'une montre



Nous allons, dans ce chapitre, plus particulièrement étudier ce repérage avec les arcs de cercle.

Définition :(**Cercle trigonométrique**)

Le cercle trigonométrique est le cercle de rayon 1 orienté dans le sens direct.

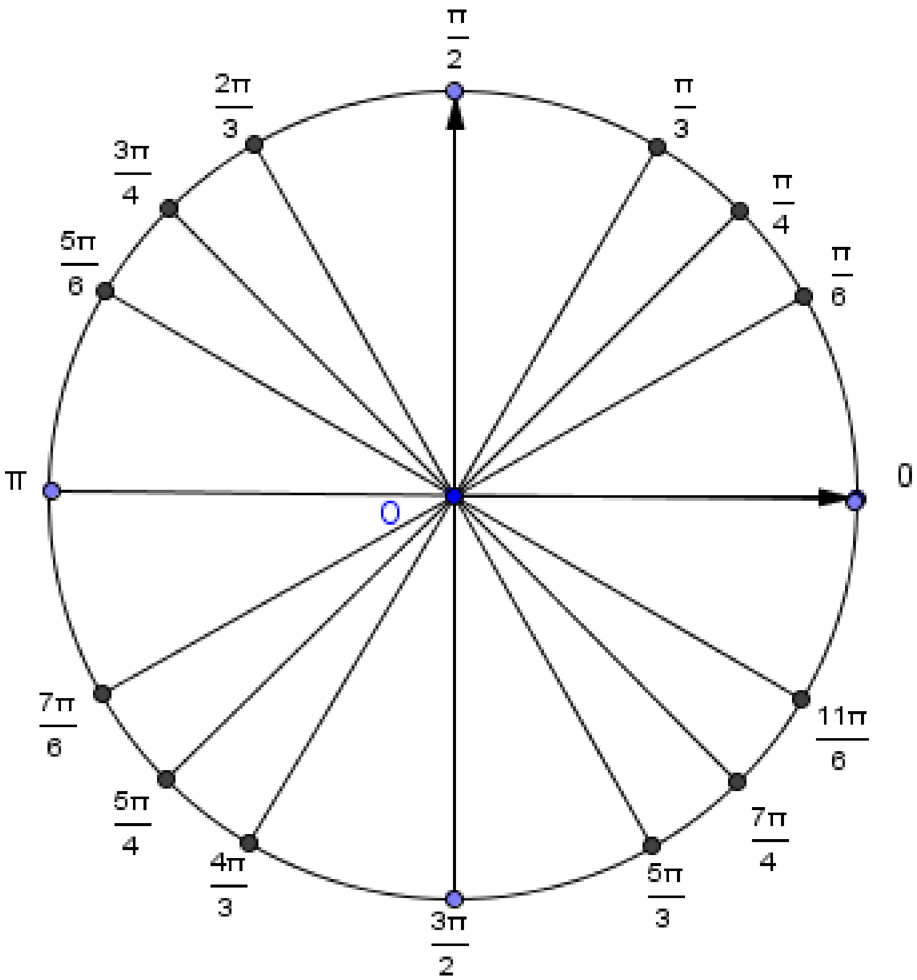
2.3 Les angles orientés de vecteurs en radians

Définition : (**Angles en radians**)
Soient A et M deux points du cercle trigonométrique de centre O.
La mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$ est la longueur de l'arc $\widehat{AM}$

Quelle est la longueur du cercle trigonométrique ?
On utilise pour cela la formule du périmètre d'un cercle : $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$
Donc le cercle trigonométrique à une longueur totale de 2π
Si on place un point M sur le cercle, l'arc $\widehat{AM}$ aura donc une longueur qui sera un multiple ou un sous multiple de 2π.
Correspondance entre les angles en degrés et les angles en radians.

Angle en degrés	360	180	90	60	45	30
Angle en radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

A l'aide de ce tableau on peut alors placer sur le cercle trigonométrique les points suivants :



2.4 Mesure principale d'un angle en radian

Activité :
Placer les points M sur le cercle trigonométrique, sachant que $\widehat{AOM}$ est :

$$\frac{\pi}{3}\,; \qquad \frac{8\pi}{3}\,; \qquad -\frac{5\pi}{3}\,; \qquad \frac{13\pi}{3}\,; \qquad -\frac{11\pi}{3}$$

On remarque que plusieurs mesures d'un angle, définissent les mêmes points. Il y a donc plusieurs valeurs possibles d'un angle en radians.
Nous allons en définir une plus particulièrement : **La mesure principale**.

Définition : (**Mesure principale d'un angle**)
La mesure principale d'un angle est l'unique mesure appartenant à $]-\pi;\pi]$

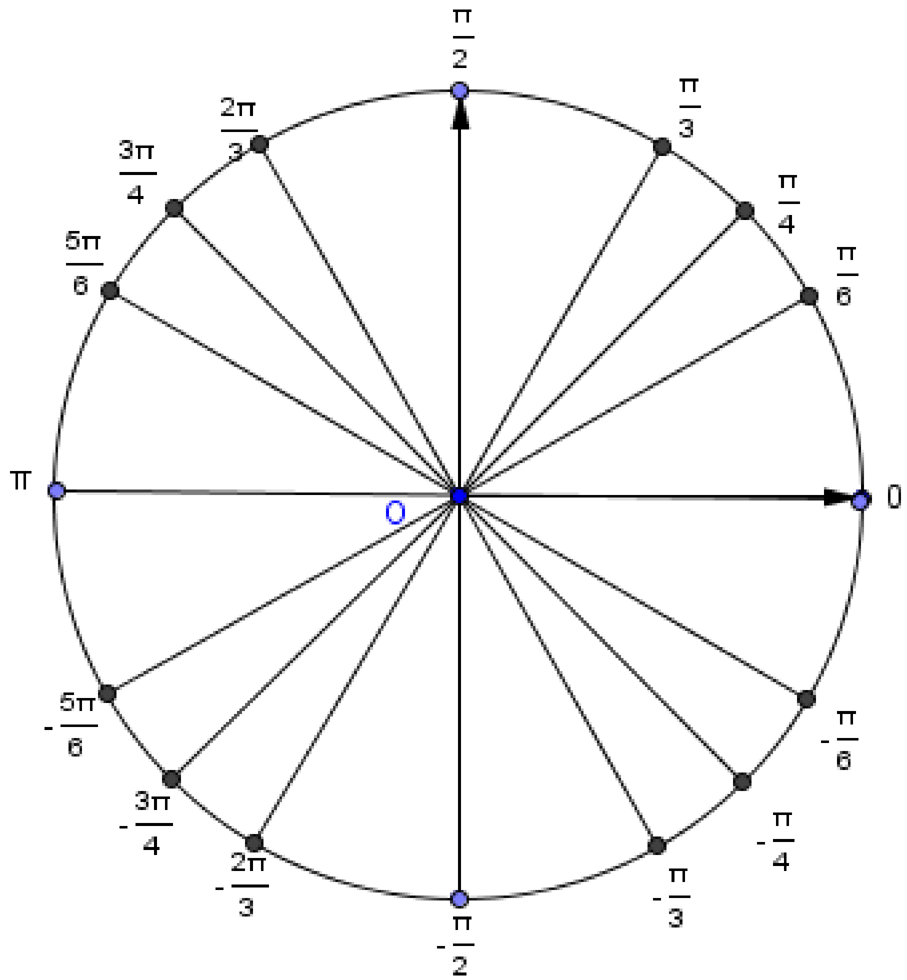
Exemples :

➠ La mesure principale de $\alpha = \dfrac{21\pi}{2}$ est : $\dfrac{\pi}{2}$.

➠ La mesure principale de $\alpha = \dfrac{13\pi}{3}$ est : $\dfrac{\pi}{3}$.

➠ La mesure principale de $\alpha = -\dfrac{13\pi}{2}$ est : $-\dfrac{\pi}{6}$.

Les mesures principales les plus utilisées sont :



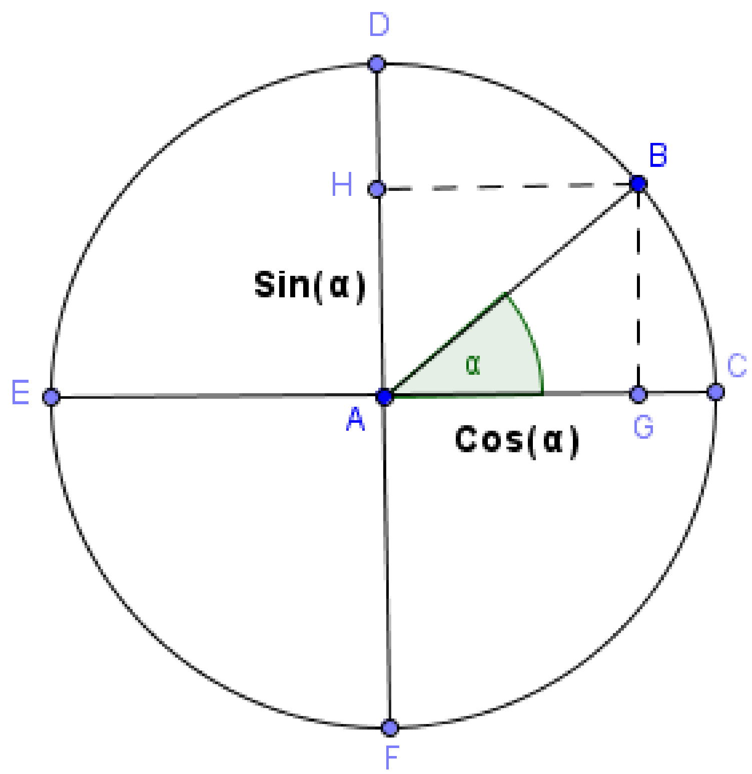
3 La trigonométrie

Activité :
Soit un cercle trigonométrique de centre A.
Soient C et D deux points du cercle tels que $(AC) \perp (AD)$. On note B un point du cercle tel que $\widehat{CAB} = \alpha$ rd.
On note G le projeté orthogonal de B sur $(O; \overrightarrow{i})$ et H le projeté orthogonal de B sur $(O; \overrightarrow{j})$.

1. Calculer AG en fonction de α.
2. Calculer AH en fonction de α.

3.1 Définition du cosinus et du sinus

Définition : (Cosinus et Sinus d'un angle)
Soit α un réel quelconque.
Il lui correspond un unique point M du cercle trigonométrique tel que $\widehat{CAM} = \alpha$ rd.
➠ On note $\cos(\alpha)$ l'abscisse de M dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
➠ On note $\sin(\alpha)$ l'ordonnée de M dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.



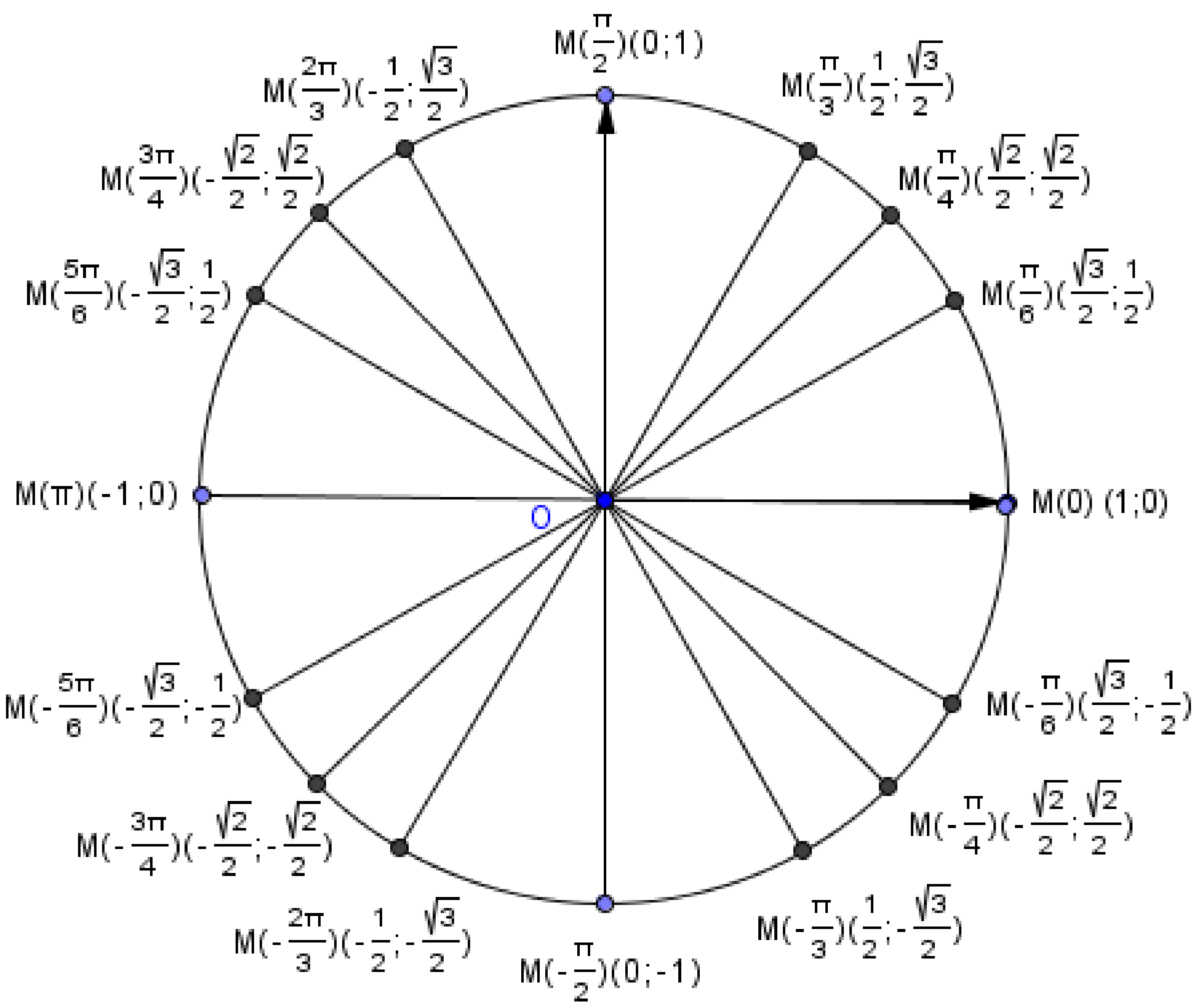
Propriétés :

1. Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ alors M a pour coordonnées $(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$

Tableau des valeurs à connaître par coeur :

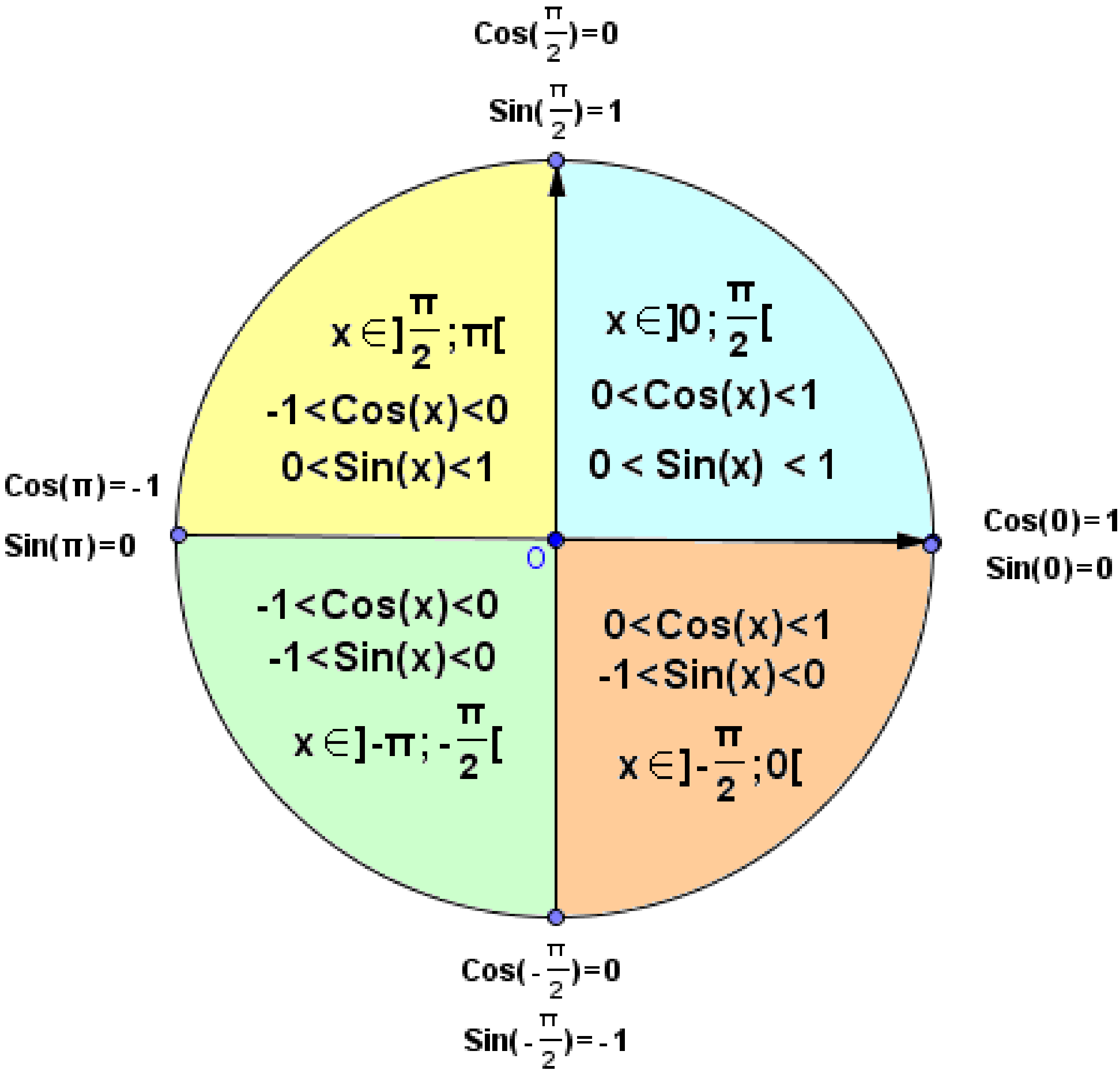
α rd	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Quelques valeurs remarquables :



$M(\frac{\pi}{2})(0;1)$
$M(\frac{2\pi}{3})(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$
$M(\frac{\pi}{3})(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$
$M(\frac{3\pi}{4})(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$
$M(\frac{\pi}{4})(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$
$M(\frac{5\pi}{6})(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2})$
$M(\frac{\pi}{6})(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2})$
$M(\pi)(-1;0)$
O
$M(0)\ (1;0)$
$M(-\frac{5\pi}{6})(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2})$
$M(-\frac{\pi}{6})(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2})$
$M(-\frac{3\pi}{4})(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2})$
$M(-\frac{\pi}{4})(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$
$M(-\frac{2\pi}{3})(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2})$
$M(-\frac{\pi}{3})(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2})$
$M(-\frac{\pi}{2})(0;-1)$

Représentation des propriétés :

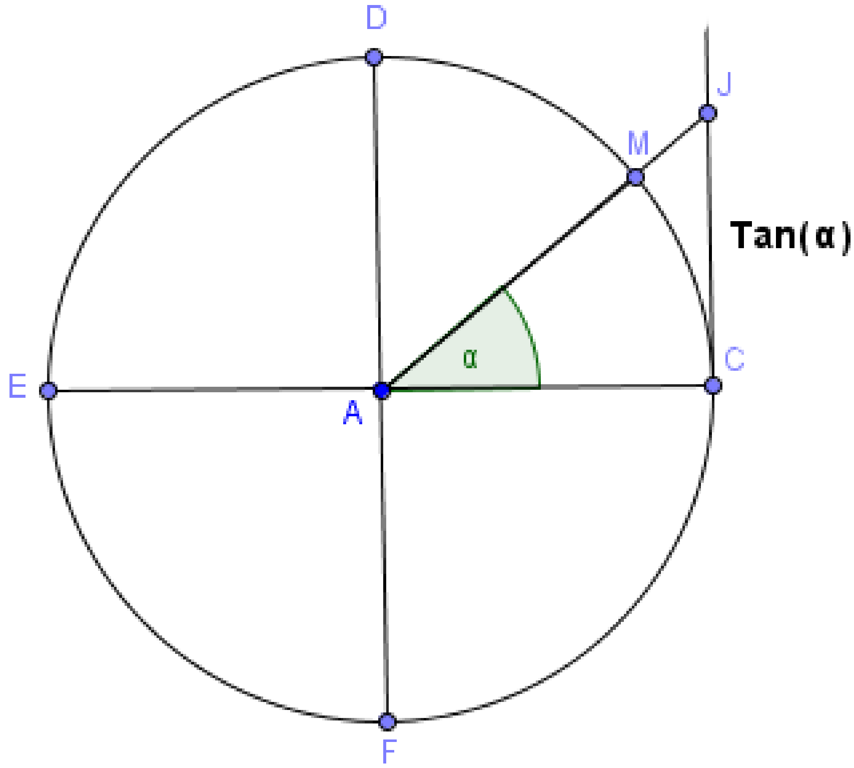


3.2 Définition de la tangente

Activité :

Soit un cercle trigonométrique de centre A.
Soient C et D deux points du cercle tels que $(AC) \perp (AD)$. On note M un point du

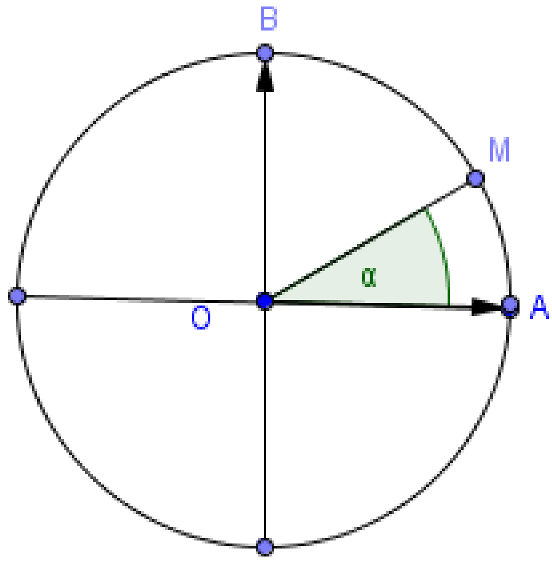
cercle tel que $\widehat{CAM} = \alpha$ rd et J le point d'intersection entre (AM) et la tangente au cercle passant par C.
Calculer CJ en fonction de α.



Définition : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, si $\cos(\alpha) \neq 0$ alors $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

3.3 Relations trigonométriques et angles associés

Activité :



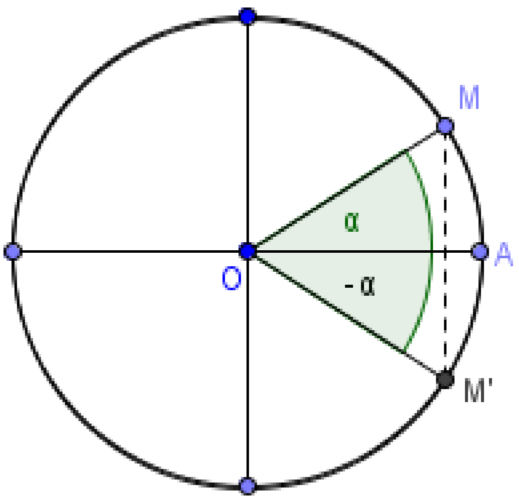
Placer sur le cercle : $\dfrac{\pi}{2}+\alpha$, $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$, $\pi+\alpha$, $\pi-\alpha$, et $-\alpha$

On obtient donc les formules suivantes :

$\cos(2\pi+\alpha)=\cos(\alpha)$	$\sin(2\pi+\alpha)=\sin(\alpha)$
$\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$
$\cos(\pi+\alpha)=-\cos(\alpha)$	$\sin(\pi+\alpha)=-\sin(\alpha)$
$\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)$
$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin(\alpha)$	$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos(\alpha)$
$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin(\alpha)$	$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos(\alpha)$

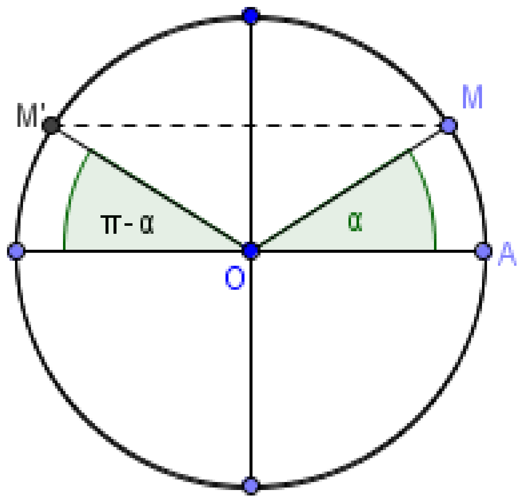
3.4 Les équations trigonométriques

3.4.1 Equation du type $\cos(x)=\cos(a)$ connaissant a



$$\cos(x)=\cos(a) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=a+2k\pi \\ x=-a+2k\pi \end{array}\right. \; avec \, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$$

3.4.2 Equation du type $\sin(x) = \sin(a)$ connaissant a



$$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{array} \right. \quad avec \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$$

4 Les angles de vecteurs

4.1 Définition

On note A et M deux points du cercle trigonométrique de centre O.

Définition : (Mesure d'un l'angle orienté)

La mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$ est la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$ ou la longueur de l'arc $\widehat{AOM}$

4.2 Propriétés

On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs unitaires. (ie : Leur norme est égale à 1)

Propriété :

$$\forall k_1 \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall k_2 \in \mathbb{R}_+^* \text{ alors } (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})=(\widehat{\overrightarrow{k_1 u}, \overrightarrow{k_2 v}})$$

Une conséquence est que si deux vecteurs ne sont pas de norme égale à 1 alors on peut toujours se ramener à des vecteurs unitaires car :

$$(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})=\left(\widehat{\frac{1}{\parallel u \parallel}\overrightarrow{u}, \frac{1}{\parallel v \parallel}\overrightarrow{v}}\right)$$

et donc se placer sur le cercle trigonométrique.

Remarque :
Comme pour le cercle, on oriente le plan de la façon suivante :

On note $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan et $k \in \mathbb{Z}$
- Si $(\vec{i}, \vec{j}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ alors on dit que $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est dans le sens <u>direct</u>.
- Si $(\vec{i}, \vec{j}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ alors on dit que $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est dans le sens <u>direct</u>.

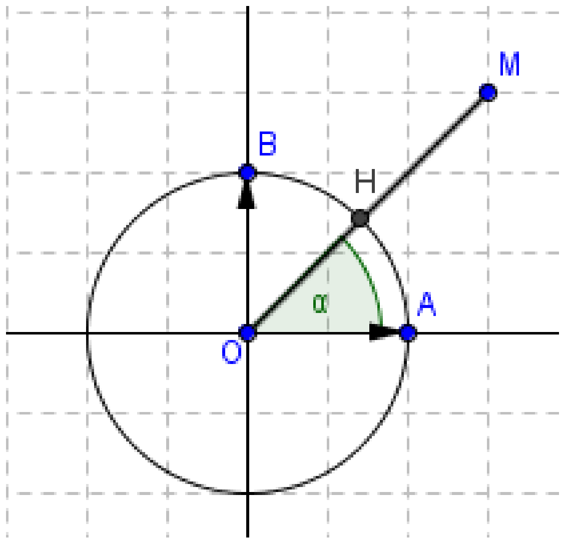
Propriétés des angles orientés de vecteurs :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et $k \in \mathbb{N}$:

- $\widehat{(\vec{u}, \vec{u})} = 0 + 2k\pi$
- $\widehat{(\vec{u}, -\vec{u})} = \widehat{(-\vec{u}, \vec{u})} = \pi + 2k\pi$
- $\widehat{(\vec{v}, \vec{u})} = -\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + 2k\pi$
- $\widehat{(-\vec{u}, \vec{v})} = \pi + \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + 2k\pi$
- $\widehat{(\vec{u}, -\vec{v})} = \pi + \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + 2k\pi$
- Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors $\widehat{(\alpha\vec{u}, \alpha\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + 2k\pi$
- $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{w})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{w})} + 2k\pi$ (Relation de Chasles)

5 Repérage polaire d'un point du plan

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un repère du plan.
On note G un point quelconque du plan tel que :

$$\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})} = \widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH})} = \theta \text{ rd}$$
$$OM = r$$



Définition : (**Coordonnées polaires**)

Le couple $[r, \theta]$ avec $r > 0$ et θ en radians, se nomme les coordonnées polaire de M dans $(O; \overrightarrow{i})$

Vocabulaire :
– O est appelé **le pôle**, $[OA)$ **l'axe polaire**, r **le rayon polaire** et θ l'un de ses angles.
Propriétés :
– Si $[r, \theta]$ est un couple de coordonnées polaires de M alors $[r, \theta + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est aussi un couple de coordonnées polaires de M.
– Un repère polaire étant choisi, à tout couple $[r, \theta]$ correspond un et un seul point.

5.1 Comment passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes ?

On note $[r, \theta]$ les coordonnées polaires de M dans $(O; \overrightarrow{i})$.
On note $(x_M; y_M)$ les coordonnées cartésiennes de M dans $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
Alors :

$$\begin{cases} \mathrm{x}_M = r\cos(\theta) \\ \mathrm{y}_M = r\sin(\theta) \end{cases}$$

5.2 Comment passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires ?

On note $[r, \theta]$ les coordonnées polaires de M dans $(O; \overrightarrow{i})$.
On note $(x_M; y_M)$ les coordonnées cartésiennes de M dans $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
Alors :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_m^2 + y_m^2} \\ \cos(\theta) = \dfrac{x_M}{r} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y_M}{r} \end{cases}$$

6 Les fonctions circulaires

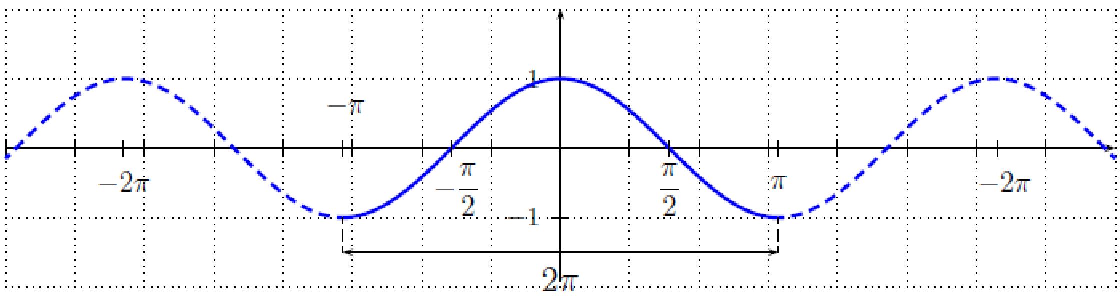
6.1 la fonction $x \longmapsto \cos x$

On note $f : x \longmapsto \cos x$

1. $f(x)$ existe pour toutes les valeurs de x réelles donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$ donc on peut étudier la parité :
   $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$ donc f est paire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x = f(x)$
   La fonction f est donc périodique de période 2π ou 2π-périodique.
   Conclusion des premiers points :
   On peut étudier la fonction f seulement sur $[0; \pi]$ et ensuite déduire la courbe représentive sur $\mathbb{R}$ par parité et par périodicité.
4. Variations :

x	0		π
	1		
f		$\searrow$	
			-1

5. Représentation graphique :



6.2 la fonction $x \mapsto \sin x$

On note $f : x \longmapsto \sin x$

1. $f(x)$ existe pour toutes les valeurs de x réelles donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$ donc on peut étudier la parité :
$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ donc f est impaire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = \sin x = f(x)$
La fonction f est donc périodique de période 2π ou 2π-périodique.
Conclusion des premiers points :
On peut étudier la fonction f seulement sur $[0;\pi]$ et ensuite déduire la courbe représentive sur $\mathbb{R}$ par parité et par périodicité.
4. Variations :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
			1		
f		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

5. Représentation graphique :