Exercice 1 :

Dans un triangle ABC on a : $AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 5$.

1. Déterminer $\cos(\widehat{BAC})$, puis $\widehat{BAC}$ à 1 degré près.
2. Donner la valeur exacte de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Exercice 2 :

Soit un triangle ABC. Donner une valeur approchée de BC, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ en degrés.

1. $AB = 8$, $AC = 5$ et $\widehat{ABC} = 70°$
2. $AB = 10$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = 110°$

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et I le milieu de $[AB]$.
Calculer la longueur CI sans utiliser le théorème de Pythagore.

Exercice 4 :

ABC est un triangle et I le milieu de $[BC]$. On sait que $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $BI = CI = 2$ et $AI = 3$.
Calculer les expressions suivantes:

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $AB^2 + AC^2$
3. $AB^2 - AC^2$
4. AB et AC

Exercice 5 :

Soit un quadrilatère $ABCD$.
On désigne par I et J les milieux respectifs des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

1. Démontrer la relation :
   $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = BD^2 + AC^2 + 4IJ^2$
2. En déduire une relation entre les côtés et les diagonales caractérisant un parallélogramme.

Exercice 6 :

ABC est un triangle. On pose $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$.
Soit O le centre de son cercle circoscrit.

1. Démontrer que pour tout point P de la médiatrice de $[AB]$, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{2}c^2$
2. Calculer en fonction des côtés du triangle, le nombre α tel que :
   $\alpha = 2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CA}$
3. On suppose dans cette question que ABC est rectangle en A. O est donc le milieu de $[BC]$.
   (a) Démontrer que $\alpha = 2a^2$
   (b) Retrouver le théorème de Pythagore dans le triangle ABC