Exercice 1 :

1. Soit P le polynôme tel que $P(x)=-2x^3+15x^2-28x+15$.
   (a) $P(1)=-2+15-28+15=0$ donc 1 est bien une racine de P.
   (b) Puisque 1 est une racine de P, on peut factoriser $P(x)$ par $x-1$ et $P(x)=(x-1)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 2.
   $Q(x)=ax^2+bx+c$ donc $(x-1)Q(x)=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c$
   $$=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$$
   Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c=-2x^3+15x^2-28x+15$
   Par identification, $\begin{cases}a=-2\\ b-a=15\\ c-b=-28\\ -c=15\end{cases}\iff\begin{cases}a=-2\\ b=15+a=13\\ c=-15\end{cases}$
   donc $P(x)=(x-1)(-2x^2+13x-15)$.
   Factorisation de $-2x^2+13x-15$:
   $\Delta=49>0$, il y a donc deux racines réelles $x_1=\dfrac{-13+\sqrt{49}}{-4}=\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{-13-\sqrt{49}}{-4}=5$
   et donc $Q(x)=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-5)$
   et ainsi
   $$P(x)=-2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-5)$$
   (c) Pour résoudre $\dfrac{P(x)}{(x-5)(x+2)}=0$, il faut commencer par éliminer les valeurs qui annulent le dénominateur.
   On cherchera donc les solutions sur $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{5;-2\}$.
   Si $x\in\mathscr{D}$, $\dfrac{P(x)}{(x-5)(x+2)}=0\Longrightarrow P(x)=0\Longrightarrow x=1$ ou $x=\dfrac{3}{2}$ ou $x=5$
   mais $5\notin\mathscr{D}$ donc
   $$S=\left\{1;\frac{3}{2}\right\}$$
   (d) Pour résoudre $\dfrac{P(x)}{(x-5)(x+2)}\leqslant 0$, il faut effectuer un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		1		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-2x^2+13x-15$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$P(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x-5)(x+2)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{P(x)}{(x-5)(x+2)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	

   Donc $\dfrac{P(x)}{(x-5)(x+2)}\leqslant 0\iff x\in\,]-2;1]\cup\left[\frac{3}{2};5\right[\cup\,]5;+\infty[$
   $$S=\,]-2;1]\cup\left[\frac{3}{2};5\right[\cup\,]5;+\infty[$$
2. Pour résoudre $\dfrac{-x^2+2x+1}{(x+1)(2x-1)}-\dfrac{x-1}{x+1}\geqslant 0$, il faut commencer par éliminer les valeurs qui annulent le dénominateur. On cherchera donc les solutions sur $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;\frac{1}{2}\}$.

Si $x \in \mathscr{D}$, $\dfrac{-x^2+2x+1}{(x+1)(2x-1)} - \dfrac{x-1}{x+1} \geqslant 0$

$\iff \dfrac{-x^2+2x+1-(x-1)(2x-1)}{(x+1)(2x-1)} \geqslant 0$

$\iff \dfrac{-x^2+2x+1-(2x^2-x-2x+1)}{(x+1)(2x-1)} \geqslant 0$

$\iff \dfrac{-3x^2+5x}{(x+1)(2x-1)} \geqslant 0$

$\iff \dfrac{-x(3x-5)}{(x+1)(2x-1)} \geqslant 0$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$-x(3x-5)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(x+1)(2x-1)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-x(3x-5)}{(x+1)(2x-1)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc $\dfrac{-x^2+2x+1}{(x+1)(2x-1)} - \dfrac{x-1}{x+1} \geqslant 0 \iff x \in \left]-1\,;0\right] \cup \left]\frac{1}{2}\,;\frac{5}{3}\right]$

$$S = \left]-1\,;0\right] \cup \left]\frac{1}{2}\,;\frac{5}{3}\right]$$

Exercice 2 :

Les dimensions du texte à insérer sont $31-2x$ et $28-2x$, on doit donc avoir $(31-2x)(28-2x) = 700 \iff 31\times 28 - 2\times 31x - 2\times 28x + 4x^2 = 700 \iff 4x^2 - 118x + 168 = 0$

$\Delta = 11\,236 > 0$, il y a donc deux racines réelles $x_1 = \dfrac{118+\sqrt{11\,236}}{8} = 28$ et $x_2 = \dfrac{118-\sqrt{11\,236}}{8} = \dfrac{3}{2}$

Or x est un nombre positif qui est nécessairement inférieur à la moitié de la largeur de la feuille donc $0 \leqslant x \leqslant 14$ et ainsi, seule la solution $\dfrac{3}{2}$ convient.

$$x = \frac{3}{2}$$

Exercice 3 :

1. $A(-k\,;1)$, $B(0\,;-3)$ et $C(k\,;3)$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}k\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2k\\2\end{pmatrix}$

   Or dire que ABC est rectangle en A équivaut à dire que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$
   $\iff 2k^2 - 8 = 0 \iff k^2 = 4 \iff k = 2$ ou $k = -2$.

2. $k = 2$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ donc $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = 2^2 + (-4)^2 = 20$ et $AC^2 = \overrightarrow{AC}^2 = 4^2 + 2^2 = 20$ donc $AB^2 = AC^2$ et ainsi, puisque AB et AC sont des longueurs, donc des nombres positifs, $AB = AC$.
   Dans ce cas, le triangle est bien isocèle en A.

Exercice 4 :

1. (a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(-\overrightarrow{AB}\right) = -AB^2 = -L^2$.

   (b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$ car $(AB) \perp (CB)$

   (c) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}$ car D est le projeté orthogonal de C sur (AD).
   $= \ell^2$

   (d) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CB}$ car B est le projeté orthogonal de E sur (BC).
   $= -BC^2 = -\ell^2$

2. (a) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

   (b) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\underbrace{-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}_{=0}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}+\underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}_{=0}$

   $=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}L^2-\ell^2$

   (c) $(AC)\perp(DE)\iff\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}=0\iff\frac{1}{2}L^2-\ell^2=0\iff L^2=2\ell^2\iff L=\sqrt{2}\ell$ (car L et ℓ sont positives) $\iff\frac{L}{\ell}=\sqrt{2}$

Exercice 5 :

1. $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}&=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\|^2-\|\overrightarrow{AB}\|^2-\|\overrightarrow{AD}\|^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(AC^2-AB^2-AD^2\right)\\&=\frac{1}{2}(49-16-25)\\&=4\end{aligned}$$

2. $\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{AD}^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2=25-2\times4+16=33$

3. $\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}\right)^2=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)^2=BD^2$

   Donc $BD^2=33$ et $BD=\sqrt{33}\approx5,7$

Exercice 6 :

Pour montrer que f est dérivable en 3, il faut prouver que $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ existe et est finie :

$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{(3+h)^2-4(3+h)-(3^2-4\times3}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{9+6h+h^2-12-4h+3}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{h^2+2h}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}h+2=2.$

Donc f est dérivable en 3 et $f'(3)=2$.