Chapitre 2

Les trinômes du second degré.

1. Définitions et vocabulaire

Trinôme du second degré
Forme canonique

2. Equations et inéquations du second degré

Équations du second degré
Inéquations du second degré

3. Les polynômes

4.Fonctions polynômes du second degré

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

1 Définitions et vocabulaire

1.1 Définition : Trinôme du second degré

Définition :
Un trinôme du second degré est un polynôme de degré 2 de la forme :

$$Px) = ax^2 + bx + c \text{ , avec } a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}$$

Exemples :

$$P_1(x) = 2x^2 + 6x + 5 \qquad P_2(x) = -x^2 + 7x - 10 \qquad P_3(x) = 4x^2 - 16 \qquad P_4(x) = 5x^2$$

1.2 Définition : Forme canonique

On souhaite trouver une expression égale les trinômes du second degré en faisant apparaître une seule fois la variable x.
Exemple :

1. $P_1(x) = x^2 - 2x + 1$
   On a évidemment $P_1(x) = (x - 1)^2$
2. $P_2(x) = 2x^2 + 8x + 16$
   On a $P_2(x) = 2(x^2 + 4x + 8)$.
   Or $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$ donc $P_2(x) = 2[(x + 2)^2 - 4 + 8] = 2[(x + 2)^2 + 4]$

Étude du cas général :
On note $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 avec $a \neq 0$.
Comme $a \neq 0$, on peut factoriser par a :
$P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$
Or
$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$
donc :
$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$
Conclusion :

Si P est un polynôme tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ alors on peut écrire P sous forme canonique :

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \qquad \text{(Forme 1)}$$

Ou

$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \qquad \text{(Forme 2)}$$

Il n'est pas utile de savoir par ❤ ces deux formules. Il faut surtout savoir retrouver les formes canoniques par le calcul.
Exercices :

- $2x^2 - 4x + 10 = 2(x^2 - 2x + 5) = 2[(x - 1)^2 - 1 + 5] = 2[(x - 1)^2 + 4] = 2(x - 1)^2 + 8$

- $3x^2 - 6x + 18 = 3(x^2 - 2x + 6) = 3[(x-1)^2 - 1 + 6] = 3[(x-1)^2 + 5] = 3(x-1)^2 + 15$
- $2x^2 + 5x + 3 = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 2\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{53}{2}\right] = 2\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right]$
  $= 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$

➠La forme canonique numéro 1 va nous permettre de factoriser les trinômes du second degré et de résoudre des équations et inéquations qu'on ne savait pas résoudre auparavant.
➠La forme canonique numéro 2 va nous permettre de faire des conclusions sur la représentation graphique et sur les variations des fonctions polynômes du second degré.

2 Équations et inéquations du second degré

2.1 Équations du second degré

On sait déjà résoudre des équations du second degré quand on peut factoriser à l'aide d'un facteur commun ou à l'aide des identités remarquables.
Exemples :

- $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$ donc $S = \{-2; 2\}$
- $x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$ donc $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$
- $\mathrm{x}^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$ donc $S = \{0; 4\}$

Maintenant nous voudrions savoir résoudre les autres équations du second degré
comme par exemple : $x^2 + 3x + 2 = 0$.
<u>Exemple</u> :
➠Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 3x + 2 = 0$.
On va pour cela, chercher la forme canonique numéro 1 du trinôme $x^2 + 3x + 2$ puis ensuite factoriser l'expression trouvée. $x^2 + 3x + 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{8}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$
Donc
$x^2 + 3x + 2 = 0$
$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$
$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)(x+1) = 0$
$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = -1$
donc $S = \{-2; -1\}$
<u>Cas général :</u>
On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$:

- Premier cas : Si $c = 0$
  $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax+b) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -b$
  donc $S = \{0; -b\}$
- Deuxième cas : Si $b = 0$ et $c \neq 0$
  $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{c}{a} = 0$
  - Si $\frac{c}{a} > 0$ alors il n'y a aucune solution, donc $S = \emptyset$

- Si $\dfrac{c}{a} < 0$ alors $x^2 + \dfrac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left|\dfrac{c}{a}\right| = 0$
  $\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}\right)\left(x - \sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}$ ou $x = -\sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}$
  donc $S = \left\{-\sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}; \sqrt{\left|\dfrac{c}{a}\right|}\right\}$

- Troisième cas : Si $b \neq 0$ et $c \neq 0$
  $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0$
  $\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$
  Pour pouvoir factoriser cette expression il faut étudier le signe de $b^2 - 4ac$:
  Dans la suite de la résolution, on notera **discriminant du trinôme** le nombre :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

  - Si $\Delta = 0$
    alors $ax^2 + b + c = 0$
    $\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \dfrac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$

    Il y a donc qu'une seule solution et $S = \{-\dfrac{b}{2a}\}$

  - Si $\Delta < 0$
    alors $ax^2 + bx + c = 0$
    $\Leftrightarrow a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$
    $\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2} < 0$

    Or dans $\mathbb{R}$ un carré n'est jamais négatif, donc il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et $S = \emptyset$.

  - Si $\Delta > 0$
    alors $ax^2 + bx + c = 0$
    $\Leftrightarrow a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$
    $\Leftrightarrow \left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right) + \sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}\right] \times \left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right) - \sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}\right] = 0$
    $\Leftrightarrow \left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right) + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] \times \left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right) - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0$
    $\Leftrightarrow x = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

    Il y a donc deux solutions $\mathrm{x}_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
    donc $S = \left\{\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Conclusion :

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré tel que $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$

On note **Discriminant du trinôme** le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$

Alors il y a trois cas possibles pour résoudre l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$

➠ Premier cas : Si $\Delta = 0$, il y a qu'une seule solution dans $\mathbb{R}$ et $S = \{-\frac{b}{2a}\}$

➠ Deuxième cas : Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et $S = \emptyset$

➠ Troisième cas : Si $\Delta > 0$, Il y a donc deux solutions dans $\mathbb{R}$, $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemples :
On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + x - 30 = 0$
Calculons le discriminant de ce trinôme : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-30) = 1 + 120 = 121$
On trouve que $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions dans $\mathbb{R}$:
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{121}}{2} = \dfrac{-1+11}{2} = 5$
$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{121}}{2} = \dfrac{-1-11}{2} = -6$
Donc $S = \{-6; 5\}$

2.1.1 Inéquations du second degré

On sait déjà résoudre les inéquations du second degré lorsqu'on peut les factoriser à l'aide d'un facteur commun ou à l'aide des identités remarquables.
Petit rappel :
Pour résoudre une inéquation du second degré il faut faire apparaître tout dans le même membre, factoriser l'expression obtenue et ensuite faire un tableau de signe.
Exemple :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(x-1)(2x+3) - (x-1)(3x-5) \leq 0$
$(x-1)(2x+3) - (x-1)(3x-5) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)[(2x+3) - (3x-5)] \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(-x+8) \leq 0$
Dressons le tableau de signe de $(x-1)(-x+8)$:

- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $-x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 8$

x	$-\infty$		1		8		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+8$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(x-1)(-x+8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc l'ensemble des x pour lesquels $(x-1)(-x+8) \leq 0$ est $S =]-\infty; 1] \cup [8; +\infty[$.

Nous savons aussi résoudre les inéquations du genre :

$$x^2 - 5 < 0 \qquad 4x^2 \geq 5x \qquad (x-2)^2 - 4 \leq 0 \quad \text{et} \quad (3x-4)^2 > 9(x+2)^2$$

A faire pour vous amuser et réviser ...
Maintenant nous voudrions savoir comment résoudre les autres équations du second degré comme par exemple : $x^2+3x+2 \geq 0$
➟Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2+3x+2 \geq 0$.
On va pour cela, chercher la forme canonique numéro 1 du trinôme x^2+3x+2 puis ensuite factoriser l'expression trouvée. $x^2+3x+2 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}+2 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}+\frac{8}{4} = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$
Donc
$x^2+3x+2 \geq 0$
$\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq 0$
$\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right) \geq 0$
$\Leftrightarrow (x+2)(x+1) \geq 0$
Il faut donc dresser le tableau de signe de $(x+2)(x+1)$:

- $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$
- $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x+1)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc l'ensemble des x pour lesquels $(x+1)(x+2) \geq 0$ est $S =]-\infty;-2] \cup [-1;+\infty[$.

Cas général :
Première partie :
Avant de commencer nous allons démontrer le théorème suivant :

> Théorème (**Factorisation des trinômes du second degré**)
> On note ax^2+bx+c un trinôme du second degré avec $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$
> On note $\Delta = b^2-4ac$
> Alors
> Si $\Delta = 0$ alors $ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$ avec $x_1 = \frac{-b}{2a}$
>
> Si $\Delta > 0$ alors $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
>
> Si $\Delta < 0$ alors on ne peut pas factoriser ax^2+bx+c dans $\mathbb{R}$

Démonstration :
On part de la forme canonique numéro 1 :

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

➟ Si $\Delta = 0$ alors $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = a(x-x_1)^2$ en ayant posé $x_1 = \frac{-b}{2a}$.

➟ Si $\Delta > 0$ alors $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{2a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{4a^2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$
donc $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

Donc $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

➠ Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{|\Delta|}{4a^2}\right]$ qui n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$.

Deuxième partie :
Maintenant que nous savons factoriser les trinômes du second degré, nous pouvons étudier leur signe en dressant un tableau :
Il y aura trois cas :

➠ Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ avec $x = \dfrac{-b}{2a}$
Donc le tableau de signe de $ax^2 + bx + c$ est :

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$a(x-x_1)^2$		Signe de a	0	Signe de a	

➠Si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
Donc le tableau de signe de $ax^2 + bx + c$ est :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x + -x_2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$a(x-x_1)(x-x_2)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

➠ Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{|\Delta|}{4a^2}\right]$
donc $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		Signe de a	

Exemple :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $x^2 + x - 30 < 0$
Calculons le discriminant de ce trinôme : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-30) = 1 + 120 = 121$
On trouve que $\Delta > 0$ et $a = 1$
$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 + \sqrt{121}}{2} = \dfrac{-1 + 11}{2} = 5$
$x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 - \sqrt{121}}{2} = \dfrac{-1 - 11}{2} = -6$
On a donc :

x	$-\infty$		-6		5		$+\infty$
$1(x-5)(x+6)$		$+$	0	-	0	$+$	

3 Les polynômes

3.1 Vocabulaire et définitions

Définition (Polynôme)
On appelle polynôme de degré n , et on les nomme $P(x)$, une expression littéral en x de la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ avec } a_n \neq 0$$

Exemples :

- $P(x) = 3x^2 + 5x + 7$ est un polynôme de degré 2.
- $P(x) = 3x^8 + 5x^5 + 7x^2 - 3$ est un polynôme de degré 8.
- $P(x) = x^3 - 8$ est un polynôme de degré 3.

Définition (Racine d'un polynôme)
On nomme racine (ou zéro) d'un polynôme P tout réel α tel que $P(\alpha) = 0$.
Exemples :

- Si $P(x) = x^2 - 4$ alors les racines de P sont 2 et -2 car $P(2) = P(-2) = 0$.
- Si $P(x) = x^2 - 2x + 1$ alors P admet une seule racine qui est 1 car $P(1) = 0$.
- Si $P(x) = x^3 - 8$ alors P admet une seule racine 2 car $P(2) = 0$.

3.2 racine des polynômes de degré 1

On note $P(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$
Alors P admet une seule racine $\dfrac{-b}{a}$.
Preuve :
$P\left(\dfrac{-b}{a}\right) = a \times \dfrac{-b}{a} + b = -b + b = 0$
Exemples :

- $P(x) = 2x + 3$ admet une seule racine réelle $\dfrac{-3}{2}$.
- $P(x) = -2x + 3$ admet une seule racine réelle $\dfrac{3}{2}$.

3.3 racine des polynômes de degré 2

On note $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$
D'après les calculs sur les équations, on a :

1. Si $\Delta = 0$ alors P admet une seule racine rélle $\dfrac{-b}{2a}$.
2. Si $\Delta > 0$ alors P admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
3. Si $\Delta < 0$ alors P n'admet aucune racine réelle.

3.4 racine des polynômes de degré supérieur à 2

Grâce à la résolution des équations de degré 2 on va pouvoir trouver les solutions de certaines équations de degré supérieur à 2.Pour cela on va utiliser un théorème qu'il faudra admettre en première S.

Théorème (Factorisation)

Si α est une racine du polynôme P alors il existe un unique polynôme Q tel que : $$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\quad P(x) = (x-\alpha)\times Q(x) \qquad \text{avec } d°Q{=}d°P-1$$

Ce théorème est très important et va nous permettre de trouver les racines de polynômes de degré 3 ou 4 ...

Exemples :
1.On souhaite trouver les racines de $P(x) = x^3 - 7x + 6$ de degré 3 après avoir vérifié que 1 est une de ses racines.
Vérifions que 1 est racine de P :
$P(1) = 1^3 - 7\times 1 + 6 = 1 - 7 + 6 = 0$ donc 1 est racine de P.
Appliquons maintenant le théorème précédente :
Comme 1 est une racine de P, il existe un unique polynôme Q de degré 2 tel que :
$P(x) = (x-1)\times Q(x)$.
Si Q est de degré 2 il est de la forme $Q(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Donc $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$. Il reste à identifer a, b et c.
$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$
Par identification, on trouve que :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b-a = 0 \\ c-b = -7 \\ -c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -6 \end{cases} \quad \textit{Donc}\ \mathrm{P(x)=(x\text{-}1)(x^2} + x - 6)$$

Pour trouver les racines de P il suffit de trouver les racines du polynôme du second degré $Q(x) = x^2 + x - 6$ et de ne pas oublier 1.
Racines du polynôme Q :
$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times 1\times(-6) = 1 + 24 = 25 = 5^2$
Donc $\Delta > 0$ et Q admet deux racines réelles :
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{5^2}}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2$$
et
$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{5^2}}{2} = \frac{-1-5}{2} = -3$$
donc p admet 3 racines réelles : -3, 1 et 2.

2.On souhaite trouver les racines de $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 4$ de degré 3 après avoir vérifié que 2 est une de ses racines.
Vérifions que 2 est racine de P :
$P(2) = 2^3 - 3\times 2^2 + 4\times 2 - 4 == 8 - 12 + 8 - 4 = 0$ donc 2 est racine de P.
Appliquons maintenant le théorème précédente :
Comme 2 est une racine de P, il existe un unique polynôme Q de degré 2 tel que :
$P(x) = (x-2)\times Q(x)$.
Si Q est de degré 2 il est de la forme $Q(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Donc $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$. Il reste à identifer a, b et c.
$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$
Par identification, on trouve que :

$$\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b-2a=-3 \\ c-2b=4 \\ -2c=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{array}\right. \textit{Donc}\ \mathrm{P(x)=(x\text{-}1)(x^2}-x+2)$$

Pour trouver les racines de P il suffit de trouver les racines du polynôme du second degré $Q(x) = x^2 - x + 2$ et de ne pas oublier 2.
Racines du polynôme Q :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7$
Donc $\Delta < 0$ et Q n'admet aucune racine réelle :
donc P admet une seule racine : 2.

4 Les fonctions polynômes du second degré

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
L'objectif de cette partie est d'étudier ses variations et sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

4.0.1 Variations de la fonction f

Pour faire cette étude on utilise la forme canonique numéro 2.

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \lambda \text{ avec } \lambda = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$g : x \mapsto x + \dfrac{b}{2a}$ est une fonction affine croissante sur $I_1 = \left]-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$ et sur $I_2 = \left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right[$
$h : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $f(I_1) =]-\infty; 0]$ et croissante sur $f(I_2) = [0; +\infty[$
donc $l : x \mapsto (g \circ h)(x) = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ est donc décroissante sur I_1 et croissante sur I_2.

On a en fait $f : x \mapsto a \times l(x) - \lambda$
D'après les théorèmes du cours sur les fonctions, on peut en déduire que :

- Si $a > 0$ alors f est décroissante sur I_1 et croissante sur I_2.
- Si $a < 0$ alors f est croissante sur I_1 et décroissante sur I_2

Conclusion :

- Si $a > 0$ alors le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

- Si $a < 0$ alors le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$	$\searrow$	

- La fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ admet un extrémum en $x = \dfrac{-b}{2a}$

4.0.2 Courbe représentative de la fonction f

On note g la fonction $\frac{1}{a}f$ (on peut car $a \neq 0$)
Alors on a

$$g(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

D'après le cours sur les fonctions, $\mathcal{C}_g$ est l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur : $\frac{-b}{2a}\overrightarrow{i} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\overrightarrow{j}$. Donc la courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est une parabole tournée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$.

Conclusion :

> La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est une parabole de sommet $S\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ tournée vers le haut si $a > 0$ et tournée vers le bas si $a < 0$. Cette parabole admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$

Exemples :

1. Étudier les variations et la courbe représentative de $f : x \mapsto 2x^2 + 6x + 5$
2. Étudier les variations et la courbe représentative de $f : x \mapsto -x^2 + 7x - 10$