LE PRODUIT SCALAIRE

(En première S)

Dernière mise à jour : Jeudi 4 Janvier 2007

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble (Année 2006-2007)

Table des matières

1 Grille d'autoévaluation

- Cocher A si vous pensez maîtriser parfaitement ce savoir ou ce savoir-faire.
- Cocher EA si vous pensez maîtriser partiellement ce savoir ou ce savoir-faire.
- Cocher NA si vous pensez ne pas maîtriser ce savoir ou ce savoir-faire.

					Savoir, Savoirs-faire et compétences	A	EA	NA
A	G	1	0	1	Connaître et savoir utiliser la définition du produit scalaire			
A	G	1	0	2	Connaître le produit scalaire pour deux vecteurs colinéaires			
A	G	1	0	3	Connaître le produit scalaire pour deux vecteurs orthogonaux			
A	G	1	0	4	Calculer le carré scalaire d'un vecteur			
A	G	1	0	5	Exprimer le produit scalaire à l'aide d'un projeté orthogonal			
A	G	1	0	6	Savoir développer ou factoriser des expressions avec produits scalaires			
A	G	1	0	7	Calculer la norme d'une somme ou d'une différence de deux vecteurs			
A	G	1	0	8	Calculer le produit d'une somme par la différence de deux vecteurs			
A	G	1	0	9	Calculer le produit scalaire de deux vecteurs avec leurs coordonnées			
A	G	1	0	10	Connaître et savoir utiliser les différentes expression du produit scalaire			
A	G	1	0	11	Connaître et savoir utiliser la formule d'Al-Kashi			
A	G	1	0	11	Savoir calculer l'équation cartésienne d'une droite perpendiculaire à une autre			
A	G	1	0	12	Savoir calculer l'équation cartésienne d'un cercle			
A	G	1	0	13	Savoir décrire un cercle connaissant son équation cartésienne			
A	G	1	0	14	Connaître et savoir utiliser les formules de la médiane			
A	G	1	0	15	Décrire l'ensemble des points M vérifiant $MA^2 + MB^2 = k$			
A	G	1	0	16	Décrire l'ensemble des points M vérifiant $MA^2 - MB^2 = k$			
A	G	1	0	17	Décrire l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$			
A	G	1	0	18	Connaître et savoir utiliser les formules d'addition trigonométrique			
A	G	1	0	19	Connaître et savoir utiliser les formules de linéarisation trigonométrique			
A	G	1	0	20	Connaître et savoir utiliser les formules de duplication trigonométrique			
A	G	1	0	21	Connaître et savoir utiliser les formules sur l'aire d'un triangle			
A	G	1	0	22	Connaître et savoir utiliser la formule des sinus			

2 Définition et Propriétés

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.

2.1 Définition du produit scalaire

Définition 1

On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$$

Remarque :
➠ Si l'un des vecteurs est nul alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

2.2 Produit scalaire et commutativité

Propriété 1

$\forall \overrightarrow{u}, \forall \overrightarrow{v}$ on a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$

Démonstration :
$\forall \overrightarrow{u}, \forall \overrightarrow{v}$ on a $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \cos(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}})$
donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \| \overrightarrow{v} \| \times \| \overrightarrow{u} \| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}}) = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$

2.3 Produit scalaire et vecteurs colinéaires

Propriété 2

On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.

Si $\lambda > 0$ ($\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le même sens) alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \|$

Si $\lambda < 0$ ($\overrightarrow{u}$ dans le sens contraire de $\overrightarrow{v}$) alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = - \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \|$

Démonstration :
On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$
tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.
➠ Si $\lambda > 0$ alors $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = 1$ donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \|$
➠ Si $\lambda < 0$ alors $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = -1$ donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = - \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \|$

2.4 Produit scalaire et vecteurs orthogonaux

Propriété 3

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls, alors $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Démonstration :

➠ $(\Rightarrow)$:

Si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ alors $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = 0$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

➠ $(\Leftarrow)$:

Si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, $\| \overrightarrow{u} \| \neq 0$ et $\| \overrightarrow{v} \| \neq 0$

alors $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = 0$ donc $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$

Remarque :

Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ alors $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}}) = 1$ donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \| \overrightarrow{u} \|^2$

Définition 2

> On nomme **carré scalaire de** $\overrightarrow{u}$ le nombre réel noté $\overrightarrow{u}^2$ tel que $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \| \overrightarrow{u} \|^2$

3 Interprétation géométrique

On note $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
Soient O, A et B trois points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$

3.1 Définition géométrique du produit scalaire

Définition 3 (Autre définition du produit scalaire)

> $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$$
> où $\overrightarrow{OH}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{OB}$ sur (OA)

Démonstration :

➠ Premier cas :

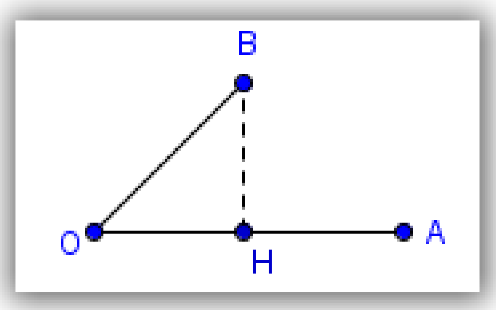

Figure 1

Dans le triangle OHB rectangle en H on a : $\cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \cos(\widehat{HOB}) = \dfrac{OH}{OB}$

d'où $OB \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = OH$

donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = OA \times OH = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$

donc

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$$

➠ Deuxième cas :

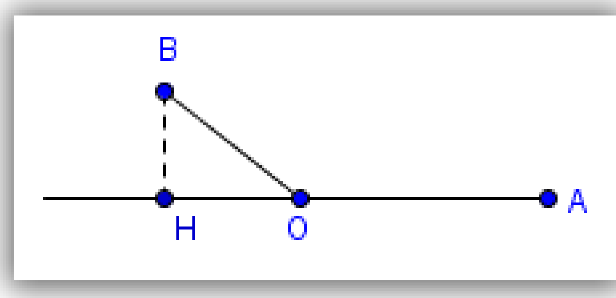

Figure 2

Dans le triangle HOB rectangle en H on a : $\cos(\widehat{\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OB}}) = \cos(\widehat{HOB}) = \dfrac{OH}{OB}$

or $\widehat{HOB} = \pi - \widehat{AOB}$ d'où $\cos(\pi - \widehat{AOB}) = \dfrac{OH}{OB} = -\cos(\widehat{AOB})$ [Rappel : $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$]

donc $OB \times \cos(\widehat{AOB}) = -OH$

donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = OA \times (-OH) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$

donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$

3.2 Retour aux propriétés du produit scalaire

3.3 Remarques et exemples

➠ Propriété n° 3 :

Si $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ alors le projeté orthogonal de B sur (OA) est 0 donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

➠ Propriété n° 1 :

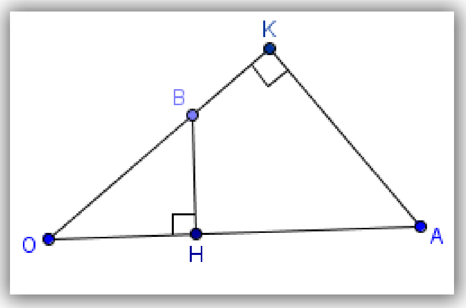

Figure 3

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OK}$ donc d'après la propriété 1 on a $\boxed{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OK}}$

Première remarque :

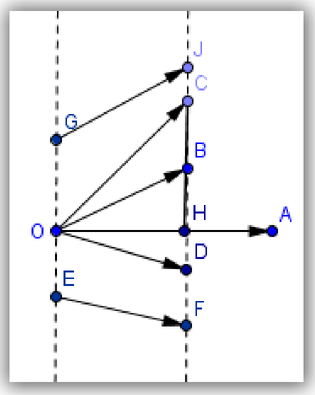

Figure 4

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{GJ}\end{aligned}$$

4 Produit scalaire et opérations

4.1 Distributivité du produit scalaire

Propriété 4 (A admettre)
On note $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs.

$$\boxed{\begin{array}{l}(1)\ \overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}\\(2)\ (\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}\end{array}}$$

4.2 Linéarité du produit scalaire

Propriété 5
On note $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et α un réel

$$\boxed{\begin{array}{l}(1)\ \overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v})=\alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\\(2)\ (\alpha\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v}=\alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\end{array}}$$

Démonstration :
Démontrons que $\overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v})=\alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v})$
$=\|\overrightarrow{u}\|\times\|\alpha\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u},\alpha\overrightarrow{v})$
$=\|\overrightarrow{u}\|\times|\alpha|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u},\alpha\overrightarrow{v})$
$=|\alpha|\,\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u},\alpha\overrightarrow{v})$
Il faut maintenant envisager trois cas :
➠ Si $\alpha>0$ alors $|\alpha|=\alpha$ et $\cos(\overrightarrow{u},\alpha\overrightarrow{v})=\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$
donc
$\overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v})=\alpha\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$
d'où : $\overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v})=\alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
$\overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v})$
➠ Si $\alpha<0$ alors $|\alpha|=-\alpha$ et $\cos(\overrightarrow{u},\alpha\overrightarrow{v})=\cos(\pi+(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}))=-\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$
donc
$\overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v})$
$=-\alpha\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|[-\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})]$
$=\alpha\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$
$=\alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
➠ Si $\alpha=0$ alors $|\alpha|=0$
donc $\overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{0}=0$
et $\alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$
donc $\overrightarrow{u}\cdot(\alpha\overrightarrow{v})=\alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$

La démonstration de $(\alpha\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v}=\alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ est identique.

4.3 Autres définitions du produit scalaire

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.
Propriété 5

$$(1)\ \| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{v} \|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$

$$(2)\ \| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{v} \|^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$

$$(3)\ (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \| \overrightarrow{u} \|^2 - \| \overrightarrow{v} \|^2$$

Démonstration :
(1)
$\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{v}$
donc $\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}$
alors $\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \| \overrightarrow{v} \|^2$
(2)
$\| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|^2 = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{u} - (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{v}$
donc $\| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}$
alors $\| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \| \overrightarrow{v} \|^2$
(3)
$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \|^2 - \| \overrightarrow{v} \|^2$
A l'aide des formules (1) et (2) nous pouvons définir le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de la façon suivante :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{u} \|^2 - \| \overrightarrow{v} \|^2\right]$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|^2\right]$$

5 Expression analytique du produit scalaire

$(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère orthonormal et les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$

5.1 Coordonnées d'un vecteur

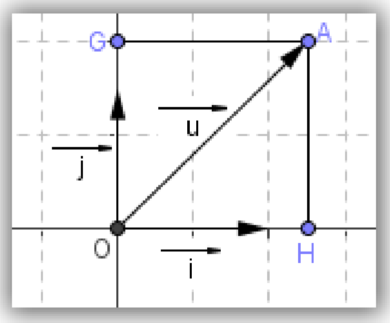

Figure 5

On a $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{i} \cdot x_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{i} = x_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = x_{\overrightarrow{u}}$
et
$\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{j} \cdot y_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{j} = y_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = y_{\overrightarrow{u}}$
Conclusion :

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ sont $(\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{u}; \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{u})$

5.2 Expression analytique d'un produit scalaire

Propriété 6

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x \times x' + y \times y'}$$

Démonstration :
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}) \cdot (x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}) = x\overrightarrow{i} \cdot x\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{i} \cdot y'\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{j} \cdot x'\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} \cdot y'\overrightarrow{j}$
$= xx' \parallel \overrightarrow{i} \parallel^2 + xy'\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} + yx'\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} + yy' \parallel \overrightarrow{j} \parallel^2$
or $\parallel \overrightarrow{i} \parallel = \parallel \overrightarrow{j} \parallel = 1$ et $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0$ car $\overrightarrow{i} \perp \overrightarrow{j}$
donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$

6 Les différentes expressions du produit scalaire

Voilà donc les différentes expressions que l'on peut utiliser pour exprimer le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

(1) $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \parallel \overrightarrow{u} \parallel \times \parallel \overrightarrow{v} \parallel \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$$

(2) Si $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$
avec $\overrightarrow{OH}$ le projeté orthogonal de $\overrightarrow{OB}$ sur (OA)

(3) $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\parallel \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \parallel^2 - \parallel \overrightarrow{u} \parallel^2 - \parallel \overrightarrow{v} \parallel^2\right]$$

(4) $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\parallel \overrightarrow{u} \parallel^2 + \parallel \overrightarrow{v} \parallel^2 - \parallel \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \parallel^2\right]$$

(5) Dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ si les vecteurs ont pour coordonnées $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$

7 Applications

7.1 Formule d'Al-Kashi

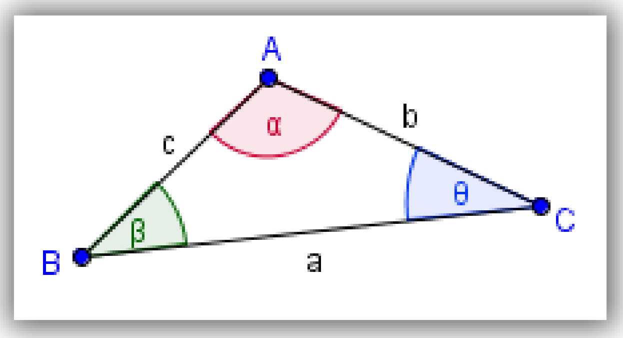

Figure 6

Théorème 1 (Al-Kashi XIV^{ime})

Si ABC est un triangle et si on note $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \beta$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \theta$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)$$

Démonstration :
Démontrons la première égalité :
$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$
donc $a^2 = b^2 + c^2 - 2AC \times AB \times \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$
Conclusion : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

7.2 Equation cartésienne d'une droite perpendiculaire à une autre

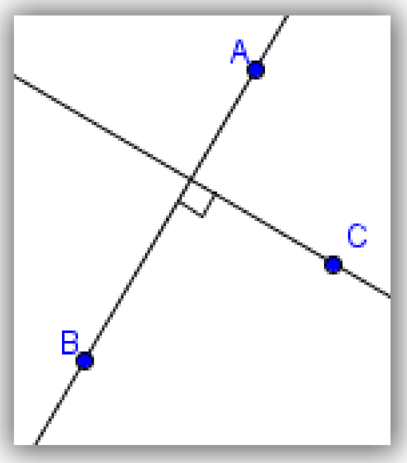

Figure 7

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note (AB) la droite passant par $A(x_A, y_B)$ et $B(x_B, y_B)$.
On souhaite trouver une équation de la droite Δ passant par $C(x_C, y_C)$ et perpendiculaire à (AB).
Si $M(x, y)$ est un point de la droite Δ alors $\overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Il reste donc à utiliser la formulation (5) du produit scalaire pour pouvoir trouver l'équation de la droite Δ.
$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (x - x_C)(x_B - x_A) + (y - y_C)(y_B - y_A) = 0$

7.3 Equation cartésienne d'un cercle

On note $\mathcal{C}$ un cercle dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$et on souhaite trouver l'équation du cercle. C'est à dire la relation entre les abscisses et les ordonnées de tous les points sur le cercle.
Il y a deux cas possibles :

1. Connaissant le centre et le rayon de $\mathcal{C}$
2. Connaissant les coordonnées de deux points diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$

7.3.1 Connaissant le centre et le rayon

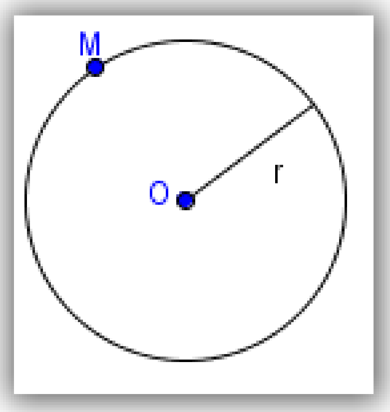

Figure 8

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $O(x_O, y_O)$ et de rayon r. On note $M(x, y)$ un point de $\mathcal{C}$. Si $M \in \mathcal{C}$ alors $OM = r$ et donc $OM^2 = r^2$
On obtient donc $\boxed{(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = r^2}$ que l'on nomme une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

7.3.2 Connaissant deux points diamétralement opposés

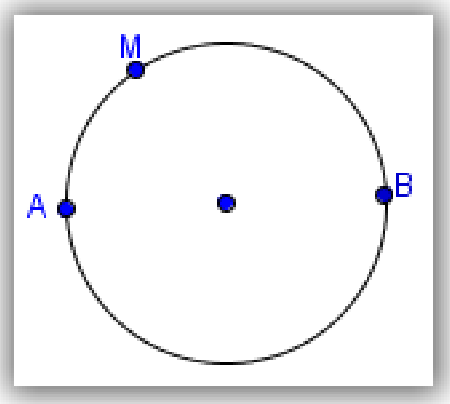

Figure 9

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. On note $M(x, y)$ un point quelconque sur le cercle.
Si $M \in \mathcal{C}$ alors $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
d'où $\boxed{(x_A - x)(x_B - x) + (y_A - y)(y_B - y) = 0}$ que l'on nomme une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

7.4 Formule de la médiane

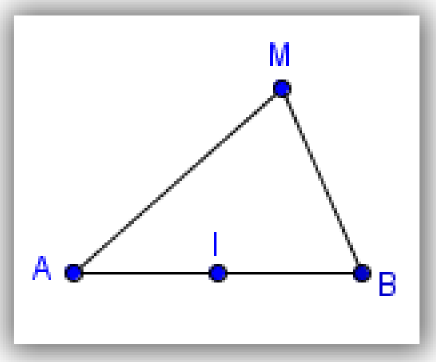

Figure 10

Théorème (Médiane)

Si MAB est un triangle et I le milieu de $[AB]$ alors

(1) $\quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

(2) $\quad MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$

(3) $\quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - IB^2 = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

Démonstration :(Formule 1)
$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 =$
$MI^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + MI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$
or $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$
donc $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + 2\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

donc $\boxed{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2}$

Démonstration :(Formule 2)
$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$
$= MI^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - MI^2 - IB^2 - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$
donc $\boxed{MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}}$

Démonstration :(Formule 3)
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$
or $\overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{MI}$ donc
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = MI^2 + IA \times IB \times \cos(\pi + 2k\pi)$
donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA \times IB = MI^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)\left(\frac{1}{2}AB\right) = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ d'où

$\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2}$

7.5 Lignes de niveau

7.5.1 Lignes de niveau du type $MA^2 + MB^2 = k$

On souhaite trouver l'ensemble des points M connaissant A, B et $k \in \mathbb{R}$ tels que $MA^2 + MB^2 = k$.
Pour cela on utilise la formule (1) du théorème de la médiane. On nomme I le milieu de $[AB]$ et donc d'après le théorème de la médiane on a $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$ donc
$MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = k$
$\Leftrightarrow 2MI^2 = k - \frac{1}{2}AB^2 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}k - \frac{1}{4}AB^2$

➠ Premier cas : Si $\frac{1}{2}k - \frac{1}{4}AB^2 < 0$ alors il n'y a aucun point M possible donc $E_M = \emptyset$

➠ Deuxième cas :Si $\frac{1}{2}k - \frac{1}{4}AB^2 > 0$ on note $\lambda = \frac{1}{2}k - \frac{1}{4}AB^2$ donc il faut trouver M tel que $MI^2 = \lambda \Leftrightarrow MI = \sqrt{\lambda}$ ou $MI = -\sqrt{\lambda}$ mais la deuxième solution est impossible en géométrie donc $MI = \sqrt{\lambda}$
L'ensemble des points M est donc le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}k - \frac{1}{4}AB^2}$.

➠ Troisième cas :Si $\frac{1}{2}k - \frac{1}{4}AB^2 = 0$ alors $MI^2 = 0$ donc $MI = 0$. On a donc $E_M = \{I\}$

7.5.2 Lignes de niveau du type $MA^2 - MB^2 = k$

On souhaite trouver l'ensemble des points M connaissant A, B et $k \in \mathbb{R}$ tels que $MA^2 - MB^2 = k$.
Pour cela on utilise la formule (2) du théorème de la médiane. On nomme I le milieu de $[AB]$ et donc d'après le théorème de la médiane on a $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$ donc $MA^2 - MB^2 = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = k$
$2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}k \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}k$
On note H le point de (AB) tel que $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}k$
On a alors $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IH}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
Donc l'ensemble des points M est sur la droite perpendiculaire à (AB) et passant par H.
De plus à l'aide de $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}k$ on peut placer le point H sur la droite (AB).

7.5.3 Lignes de niveau du type $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

On souhaite trouver l'ensemble des points M connaissant A, B et $k \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.
Pour cela on utilise la formule (3) du théorème de la médiane. On nomme I le milieu de $[AB]$ et donc d'après le théorème de la médiane on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ donc
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{1}{4}AB^2$

➠ Premier cas : Si $k + \frac{1}{4}AB^2 < 0$ alors il n'y a pas de solution : $E_M = \emptyset$

➠ Deuxième cas :Si $k + \frac{1}{4}AB^2 > 0$ alors on pose $\lambda = k + \frac{1}{4}AB^2$
On a donc $MI^2 = \lambda \Leftrightarrow MI = \sqrt{\lambda}$ ou $MI = -\sqrt{\lambda}$ la deuxième solution étant impossible en Géométrie, on obtient $MI = \sqrt{\lambda}$
Donc l'ensemble des points M est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\lambda}$.

➠ Troisième cas :$k + \frac{1}{4}AB^2 = 0$ alors $MI = 0$ donc $E_M = \{I\}$

7.6 De nouvelles formules en trigonométrie

7.6.1 Formules d'addition

Théorème 3 (Formules d'addition)

> $\forall a\mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$ on a
>
> (1) $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ (2) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
>
> (3) $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ (4) $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

Démonstration :

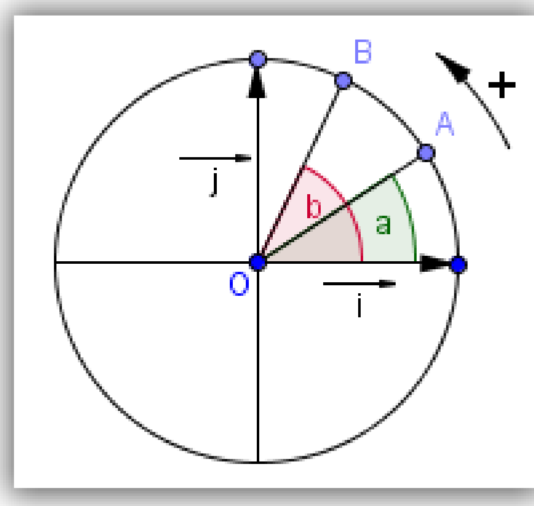

Figure 11

➠ Démontrons la formule (1) :
Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ de deux façons différentes :
- A l'aide des coordonnées :
  On a $\overrightarrow{OA}(\cos(a);\sin(a))$ et $\overrightarrow{OB}(\cos(b);\sin(b))$
  donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_{\overrightarrow{OA}} \times x_{\overrightarrow{OB}} + y_{\overrightarrow{OA}} \times y_{\overrightarrow{OB}} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- A l'aide du $\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$:
  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$
  or $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{i}) + (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}) = b - a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
  donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(a-b) = \cos(b-a)$

Conclusion : $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$ on a $\cos(b-a) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

➠ Démontrons la formule (2) :
Il suffit de reprendre la formule (1) en remplaçant b par $-b$.
$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

➠ Démontrons la formule (3) :
D'après le chapitre précédent, on a $\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right)$
donc $\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

➠ Démontrons la formule (4) :
Il suffit de reprendre la formule (3) en remplaçant b par $-b$.
Alors $\sin(a+b) = \sin(a-(-b)) = \sin(a)\cos(-b) - \cos(a)\sin(-b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

7.6.2 Formules de linéarisation

Dans les formules (2) et (4) précédentes, si on remplace b par a on obtient :

1. $\boxed{\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)}$
2. $\boxed{\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)}$

7.6.3 Formules de duplication

1. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a)) = 2\cos^2(a) - 1$

   donc $2\cos^2(a) = \cos(2a) + 1$ d'où $\boxed{\cos^2(a) = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}}$
2. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - \sin^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a)$

   donc $2\sin^2(a) = 1 - \cos(2a)$ d'où $\boxed{\sin^2(a) = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}}$

7.7 Autres formules à connaître

7.7.1 Aire d'un triangle

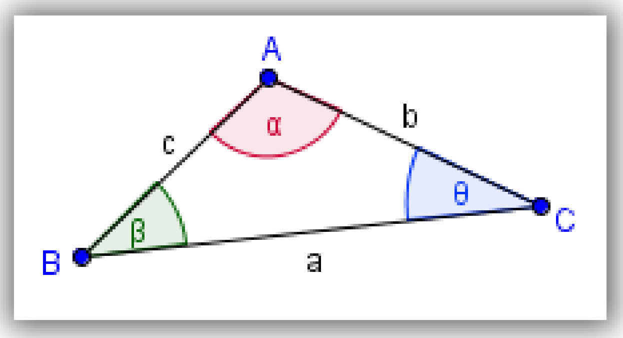

Figure 12

On note S la surface du triangle ci-dessus, alors :

$$S = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$$

$$S = \frac{1}{2}ac\sin(\beta)$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin(\theta)$$

Démonstration :

➠ Démontrons la troisème formule :

Si $\widehat{ACH}$ est aigu :

On sait que $S = \frac{1}{2}BC \times AH$

Or dans le triangle AHC rectangle en H on a AH=AC$\times \sin(\theta)$ donc $S = \frac{1}{2}ab\sin(\theta)$

Si $\widehat{ACH}$ est obtu :

On a $\sin(\widehat{ACH}) = \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$

donc on obtient la même formule.

7.7.2 Formule des sinus

Propriété

Dans le triangle ci-dessus, on a :

$$\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\theta)}$$

Démonstration :
On sait d'après le paragraphe précédent que :
$S = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) = \frac{1}{2}ac\sin(\beta) = \frac{1}{2}ab\sin(\theta)$
En multipliant les égalités par $\frac{2}{abc}$ puis en prenant l'inverse, on obtient les bonnes formules.