

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions.

1. Quelques rappels de seconde
1. Opérations algébriques sur les fonctions
 2. Courbes et transformations
 3. Composition de deux fonctions

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

1 Quelques rappels de seconde

Fiche d'activités  ActivitesPrepaRappelsReference.pdf 

Une fonction f définie sur une partie I de \mathbb{R} associe à chaque nombre $x \in I$ un nombre réel et un seul, que l'on note $f(x)$. $f(x)$ s'appelle **l'image de x par la fonction f** . x s'appelle **l'antécédent** de $f(x)$.

Ensemble de définition d'une fonction :

L'ensemble de définition d'une fonction f (noté D_f) est l'ensemble des nombres réels tels que $f(x)$ existe.
 $D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) \text{ existe} \}$

Courbe représentative d'une fonction :

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. f est une fonction définie sur I . On appelle **courbe représentative de f sur I** , l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in I$ et $y = f(x)$. On dit alors que $y = f(x)$ est **l'équation de la courbe f** dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Voir les activités.

Parité d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur une partie I de \mathbb{R} .

Si D_f est symétrique par rapport à 0, alors

- Si de plus $\forall x \in D_f$ on a $f(-x) = f(x)$ alors la fonction f est paire et sa courbe représentative C_f est symétrique par rapport à (O, \vec{j})
- Si de plus $\forall x \in D_f$ on a $f(-x) = -f(x)$ alors la fonction f est impaire et sa courbe représentative C_f est symétrique par rapport à $O(0, 0)$ l'origine du repère.

Périodicité d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et $T \in \mathbb{R}^*$.

Si $\forall x \in D_f$ on a $f(x + T) = f(x)$ alors on dit que f est périodique de période T ou qu'elle est T -périodique.
 Dans ce cas sa courbe représentative peut être tracé en recopiant de façon répétitive, une portion particulière de longueur une période, à intervalles réguliers

Variations d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur I .

Si $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$ tels que $a \leq b$ on a $f(a) \leq f(b)$ alors f est croissante sur I
 Si $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$ tels que $a < b$ on a $f(a) < f(b)$ alors f est strictement croissante sur I

Si $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$ tels que $a \leq b$ on a $f(a) \geq f(b)$ alors f est décroissante sur I
 Si $\forall a \in I$ et $\forall b \in I$ tels que $a > b$ on a $f(a) > f(b)$ alors f est strictement décroissante sur I

Extremums d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur I .

Si Il existe $a \in I$ tel que $\forall x \in I f(x) \leq f(a)$ alors $f(a)$ est un maximum de f sur I
Si Il existe $a \in I$ tel que $\forall x \in I f(x) \geq f(a)$ alors $f(a)$ est un minimum de f sur I

2 Opérations algébriques sur les fonctions

Fiche d'activités  ActivitesPrepaOperVariaFonctions.pdf  Act1

2.1 Définitions

On note f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I et λ un nombre réel.

Définition de $f + g$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

La fonction $f + g$ est la fonction définie sur D_{f+g} par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

Exemple :

On note $f : x \mapsto x^2$ définie sur \mathbb{R}

On note $g : x \mapsto x - 3$ définie sur \mathbb{R}

Alors $f + g : x \mapsto x^2 + x - 3$ est définie sur \mathbb{R}

Définition de λf

$$D_{\lambda f} = D_f$$

La fonction λf est la fonction définie sur $D_{\lambda f}$ par $(\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$

Exemples

$3f : x \mapsto 3x - 9$ est définie sur \mathbb{R}

Définition de fg

$$D_{fg} = D_f \cap D_g$$

La fonction fg est la fonction définie sur D_{fg} par $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$

Exemple :

$fg : x \mapsto x^3 - 3x^2$ est définie sur \mathbb{R}

Définition de $\frac{f}{g}$

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g \setminus \{x \in R \text{ tq } g(x) = 0\}$$

La fonction $\frac{f}{g}$ est la fonction définie sur $D_{f/g}$ par $\frac{f}{g} = \frac{f(x)}{g(x)}$

Exemple :

$\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x^2}{x-3}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

2.2 Vocabulaire

Fonctions polynômes :

La somme de fonctions de la forme αx^n avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ s'appelle **une fonction polynôme**.

Fonctions rationnelles :

La quotient de deux fonctions polynômes s'appelle **une fonction rationnelle**.

Exemples :

1. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ est une fonction rationnelle définie sur \mathbb{R} .

2. $g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 1}$ est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Exercice 1:

On note $f : \mapsto \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2}$

1. Trouver D_f
2. Écrire f sous forme d'une fonction rationnelle.

Exercice 2 :

Trouver a et b (deux réels) tels que : $\frac{x + 2}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}$

Fonctions homographiques :

La fonction rationnelle $f : \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$ ou a, b, c, d sont des réels avec $c \neq 0$ est appelée **fonction homographique**

Exemples :

1. $f : \mapsto 3 - \frac{5}{2x + 1}$ est-elle homographique ?

2. trouver les réels a et b tels que : $f(x) = \frac{6x + 7}{2x + 3} = a + \frac{b}{2x + 3}$

2.3 Variations

2.3.1 Variations de $\lambda + f$

On note f une fonction définie sur un intervalle I et λ un réel quelconque.

Question 1 : Quel est le sens de variation de la fonction $f + \lambda$?

Théorème 1 :

Les fonctions f et $f + \lambda$ ont les mêmes variations sur I .

Démonstration :

Soient a et b deux réels appartenant à I tels que $a < b$

Alors $(f + \lambda)(a) - (f + \lambda)(b) = f(a) + \lambda - f(b) - \lambda = f(a) - f(b)$

▮ Si $f \nearrow$ alors $(f + \lambda)(a) - (f + \lambda)(b) < 0$ donc $f + \lambda$ est croissante.

▮ Si $f \searrow$ alors $(f + \lambda)(a) - (f + \lambda)(b) > 0$ donc $f + \lambda$ est décroissante.

2.3.2 Variations de λf

Question 2 : Quel est le sens de variation de la fonction λf ?

Théorème 2 :

Si $\lambda > 0$ alors les fonctions f et λf ont les mêmes variations sur I .
 Si $\lambda < 0$ alors les fonctions f et λf ont des variations contraires sur I .

Démonstration :

Soient a et b deux réels appartenant à I tels que $a < b$

Alors $(\lambda f)(a) - (\lambda f)(b) = \lambda f(a) - \lambda f(b) = \lambda(f(a) - f(b))$

▮ Si $\lambda > 0$

Si de plus $f \nearrow$ alors $(\lambda f)(a) - (\lambda f)(b) < 0$ donc λf est croissante.

Si de plus $f \searrow$ alors $(\lambda f)(a) - (\lambda f)(b) > 0$ donc λf est décroissante.

▮ Si $\lambda < 0$

Si de plus $f \nearrow$ alors $(\lambda f)(a) - (\lambda f)(b) > 0$ donc λf est décroissante.

Si de plus $f \searrow$ alors $(\lambda f)(a) - (\lambda f)(b) < 0$ donc λf est croissante.

Exemples :

Étudier les variations de $f : x \mapsto x^2 - 3$, $g : x \mapsto \frac{3}{x}$ et $h : x \mapsto 5 - 2\sqrt{x}$

2.3.3 Variations de $g : x \mapsto f(x + \lambda)$

Question 3 : Quel est le sens de variation de la fonction $g : x \mapsto f(x + \lambda)$?

Théorème 3 :

On note g la fonction qui à x associe $f(x + \lambda)$

Si f est strictement croissante sur $[a; b]$ alors g est strictement croissante sur $[a - \lambda; b - \lambda]$

Si f est strictement décroissante sur $[a; b]$ alors g est strictement décroissante sur $[a - \lambda; b - \lambda]$

(On peut remplacer $[a; b]$ par $]a; b[$ ou $]a; b]$ ou $[a; b[$)

Démonstration :

Première partie :

On note $u : x \mapsto x + \lambda$

Soient deux nombres a et b de $[a - \lambda; b - \lambda]$ tels que $a < b$.

La fonction u est strictement croissante sur \mathbb{R} donc $u(a) < u(b) \Leftrightarrow a + \lambda < b + \lambda$.

De plus si $a \in [a - \lambda; b - \lambda]$ alors $a + \lambda \in [a; b]$ et si $b \in [a - \lambda; b - \lambda]$ alors $b + \lambda \in [a; b]$.

Or sur $[a; b]$ la fonction f est strictement croissante, donc $f(a + \lambda) < f(b + \lambda)$

donc $g(a) < g(b)$ ce qui implique que g est strictement croissante sur $[a - \lambda; b - \lambda]$.

Première partie :

A faire pour vous amuser ...

Exemple : Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto (x - 7)^2$

3 Courbes et transformations

Fiche d'activités  ActivitesPrepaOperVariaFonctions.pdf  Act2

3.1 Courbe représentative de $f + \lambda$

On note f une fonction définie sur I .

Théorème 4 :

On obtient $\mathcal{C}_{f+\lambda}$ en faisant une translation de \mathcal{C}_f de vecteur $\lambda \vec{j}$

Démonstration :

Soient deux points $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$

$$\Rightarrow M' = t_{\lambda \vec{j}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{j} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 0 \\ y' - y = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y + \lambda \end{cases}$$

$\Rightarrow M(x; y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y - \lambda = f(x) - \lambda \Leftrightarrow y = g(x) + \lambda$ ce qui signifie que le point de coordonnées $(x; y + \lambda)$ qui est le translaté de M par la translation de vecteur $\lambda \vec{j}$ est un point de \mathcal{C}_g .

3.2 Courbe représentative de g avec $g(x) = f(x + \lambda)$

On note f une fonction définie sur I .

Théorème 5 :

On obtient \mathcal{C}_g sachant que $\forall x \in D_g, g(x) = f(x + \lambda)$ en faisant une translation de \mathcal{C}_f de vecteur $-\lambda \vec{i}$

Démonstration :

Soient deux points $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$

$$\Rightarrow M' = t_{-\lambda \vec{i}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = -\lambda \vec{i} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = -\lambda \\ y' - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - \lambda \\ y' = y \end{cases}$$

$\Rightarrow M(x; y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = f(x - \lambda + \lambda) = g(x - \lambda)$ ce qui signifie que le point de coordonnées $(x - \lambda; y)$ qui est le translaté de M par la translation de vecteur $-\lambda \vec{i}$ est un point de \mathcal{C}_g .

3.3 Courbe représentative de g avec $g(x) = f(x + \lambda) + \alpha$

On note f une fonction définie sur I .

Théorème 5 bis :

On obtient \mathcal{C}_g sachant que $\forall x \in D_g, g(x) = f(x + \lambda) + \alpha$ en faisant une translation de \mathcal{C}_f de vecteur $-\lambda \vec{i} + \alpha \vec{j}$

Remarques :

Si f est définie sur l'intervalle $[a; b]$

$\Rightarrow x \mapsto f(x) + \lambda$ est-elle définie aussi sur $[a; b]$?

$\Rightarrow x \mapsto f(x + \lambda)$ est-elle définie aussi sur $[a; b]$ ou sur $[a - \lambda; b - \lambda]$?

Exemples :

\Rightarrow On note f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ telle que $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Alors $f(x) = u(x+1)$ si u est la fonction inverse

donc \mathcal{C}_f est l'image de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ par la translation de vecteur $-\vec{i}$. De plus u est impaire sur \mathbb{R}^* donc $O(0;0)$ est centre de symétrie de \mathcal{C}_u et $\Omega(-1;0)$ est l'image de 0 par la translation

donc \mathcal{C}_f est une hyperbole de centre de symétrie $\Omega(-1;0)$

⇒ On note f la fonction définie sur \mathbb{R} telle que $f(x) = (x-2)^2 + 3$.

Alors $f(x) = u(x-2) + 3$ si u est la fonction carré.

\mathcal{C}_u est la parabole d'équation $y = x^2$ et de sommet $O(0;0)$

La courbe d'équation $y = u(x-2) + 3$ est l'image de \mathcal{C}_u par la translation de vecteur $+2\vec{i} + 3\vec{j}$.

C'est donc une parabole de sommet $\Delta(2;3)$

\mathcal{C}_u a pour axe de symétrie $x = 0$ car u est paire sur \mathbb{R} donc \mathcal{C}_f a pour axe de symétrie $x = 2$.

4 Composition de deux fonctions

4.1 Définitions

Fiche d'activités  ActivitesPrepaComposition.pdf 

Définition de $f \circ g$

Soit f une fonction définie sur D_f et g une fonction définie sur D_g telles que
 $\forall x \in I, f(x) \in D_g$.
 On appelle **composée de f suivie de g** , la fonction notée $g \circ f$ (g rond f)
 définie sur $D_{g \circ f}$ par $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

Remarque importante :

Pour que $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ existe il faut que $x \in D_f$ et que $f(x) \in D_g$.

Pour que $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ existe il faut que $x \in D_g$ et que $f(x) \in D_f$.

Exemples :

1. On note $f : x \rightarrow x^2$ définie sur \mathbb{R} et $g : x \mapsto x + 1$ définie sur \mathbb{R} .

⇒ $g \circ f$ est définie sur \mathbb{R} et $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = x^2 + 1$

⇒ $f \circ g$ est définie sur \mathbb{R} et $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

2. On note $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* et $g : x \mapsto x^2 + 1$ définie sur \mathbb{R} .

⇒ $g \circ f$ est définie sur \mathbb{R}^* et $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} + 1$

⇒ $f \circ g$ est définie sur \mathbb{R} (car $x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$) et $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2 + 1) = \frac{1}{x^2 + 1}$

3. On note $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* et $g : x \mapsto x^2 - 1$ définie sur \mathbb{R} .

⇒ $g \circ f$ est définie sur \mathbb{R}^* et $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} - 1$

⇒ $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ (car $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$)

et $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2 - 1) = \frac{1}{x^2 - 1}$

4.2 Variations

Fiche d'activités  ActivitesPrepaComposition.pdf 

Théorème 6

On note $f(I)$ l'ensemble des valeurs $f(x)$ où $x \in I$.

- ▣ Si f est croissante sur I , g croissante sur $f(I)$ et $f(I) \subset D_g$ alors $g \circ f$ est croissante sur I
- ▣ Si f est décroissante sur I , g décroissante sur $f(I)$ et $f(I) \subset D_g$ alors $g \circ f$ est croissante sur I
- ▣ Si f est croissante sur I , g décroissante sur $f(I)$ et $f(I) \subset D_g$ alors $g \circ f$ est décroissante sur I
- ▣ Si f est décroissante sur I , g croissante sur $f(I)$ et $f(I) \subset D_g$ alors $g \circ f$ est décroissante sur I

On peut évidemment remplacer **croissante** par **strictement croissante** et **décroissante** par **strictement décroissante**.

Démonstration :

- ▣ Si f est croissante sur I , g décroissante sur $f(I)$ et $f(I) \subset D_g$ alors $g \circ f$ est croissante sur I

Soient a et b deux nombres de I tels que $a \leq b$

Comme f est croissante sur I alors $f(a) \leq f(b)$

Comme g est décroissante sur $f(I)$ et que $f(a) \in f(I)$ et $f(b) \in f(I)$ alors $g[f(a)] \geq g[f(b)]$

donc $(g \circ f)(a) \geq (g \circ f)(b)$

donc $g \circ f$ est croissante sur I .

Les autres démonstrations sont similaires. Vous pouvez vous amuser en les faisant ...

Exemples :

1. Étudier le sens de variation de la fonction h définie par : $h(x) = (x - 1)^2$.

$$D_h = \mathbb{R}$$

On note $f : x \mapsto x - 1$ définie sur \mathbb{R}

et $g : x \mapsto x^2$ définie sur \mathbb{R} .

Alors $h = g \circ f$

- f est croissante sur $] - \infty; 1] = I$
et $f(I) = f(] - \infty; 1]) =] - \infty; 0]$
or g est décroissante sur $] - \infty; 0]$
donc h est décroissante sur $] - \infty; 1]$.
- f est croissante sur $I = [1; +\infty[$
et $f(I) = f([1; +\infty[) = [0; +\infty[$
or g est croissante sur $[0; +\infty[$
donc h est croissante sur $[1; +\infty[$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction h définie par : $h(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

$D_h = \mathbb{R}$ car $1 + x^2$ est toujours positif.

On note $f : x \mapsto 1 + x^2$ définie sur \mathbb{R}

et $g : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur \mathbb{R}^+ .

Alors $h = g \circ f$

- f est décroissante sur $I =] - \infty; 0]$
et $f(I) = f(] - \infty; 0]) = [1; +\infty[$
or g est croissante sur $[1; +\infty[$
donc h est décroissante sur $I =] - \infty; 0]$.
- f est croissante sur $I = [0; +\infty[$
et $f(I) = f([0; +\infty[) = [1; +\infty[$
or g est croissante sur $[1; +\infty[$ donc h est croissante sur $I = [0; +\infty[$.

3. Étudier le sens de variation de la fonction h définie par : $h(x) = \sqrt{1 - x}$.

L'ensemble de définition de h est $] - \infty; 1]$, on étudie donc les variations sur cet ensemble.

On note $f : x \mapsto 1 - x$ définie sur \mathbb{R}

et $g : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur \mathbb{R}^+ .

Alors $h = g \circ f$.

- La fonction f est décroissante sur $I =] - \infty; 1]$
et $f(I) = f(] - \infty; 1]) = [0; +\infty[$
or g est croissante sur $f(I) = [0; +\infty[$
donc h est décroissante sur $I =] - \infty; 1]$.

J'ajouterai un peu plus tard des schémas sur ce cours.

❖ ❖ Fin du cours ❖ ❖