

Les angles orientés

(En première S)

Dernière mise à jour : Mercredi 24 Septembre 2008

Vincent OBATON, Enseignant au lycée Stendhal de Grenoble

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Contents

1 Définition d'un angle de vecteurs	4
1.1 Propriétés	4
2 Mesure d'un angle en radian	4
2.1 Le cercle trigonométrique	4
2.2 Comment repérer un point sur ce cercle ?	5
2.3 Les angles en radians	6
2.4 Mesure principale d'un angle en radian	7
3 Propriétés des angles de vecteurs	9
4 La trigonométrie	9
4.1 Définition du cosinus et du sinus	9
4.2 Définition de la tangente	12
4.3 Relations trigonométriques et angles associés	13
4.4 Les équations trigonométriques	14
4.4.1 Equation du type $\cos(x) = \cos(a)$ connaissant a	14
4.4.2 Equation du type $\sin(x) = \sin(a)$ connaissant a	14
5 Repérage polaire d'un point du plan	15
5.1 Comment passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes ?	15
5.2 Comment passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires ?	16

1 Définition d'un angle de vecteurs

On note A et M deux points du cercle trigonométrique de centre O .

Définition : (Mesure d'un l'angle orienté)

La mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ est la mesure de l'angle \widehat{AOM} dans le sens direct ou $-\widehat{AOM}$ dans le sens indirect ou \pm la longueur de l'arc \widehat{AOM}

1.1 Propriétés

On note \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs unitaires. (ie : Leur norme est égale à 1)

Propriété :

$$\forall k_1 \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall k_2 \in \mathbb{R}_+^* \text{ alors } (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{k_1\vec{u}, k_2\vec{v}})$$

Une conséquence est que si deux vecteurs ne sont pas de norme égale à 1 alors on peut toujours se ramener à des vecteurs unitaires car :

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \left(\widehat{\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}, \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}} \right)$$

et donc se placer sur le cercle trigonométrique.

Remarque :

Comme pour le cercle, on oriente le plan de la façon suivante :

On note $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan et $k \in \mathbb{Z}$

▮ Si $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ alors on dit que $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est dans le sens direct.

▮ Si $(\vec{i}, \vec{j}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ alors on dit que $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est dans le sens direct.

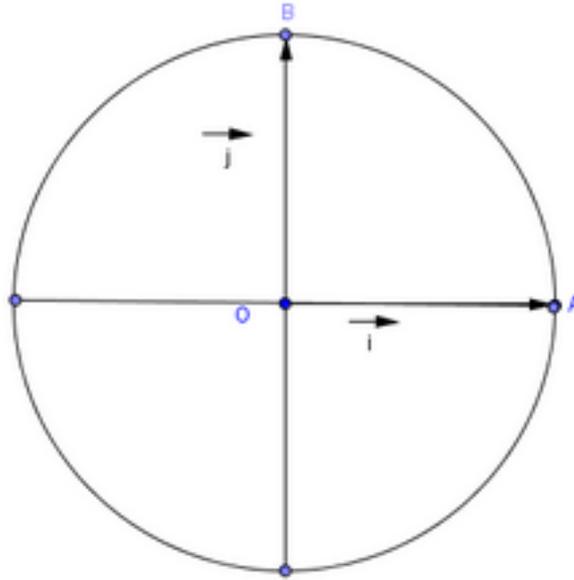
2 Mesure d'un angle en radian

2.1 Le cercle trigonométrique

Soit un cercle de rayon 1 et de centre O .

Soient A et B deux points du cercle tels que $(OA) \perp (OB)$

On définit alors un repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$



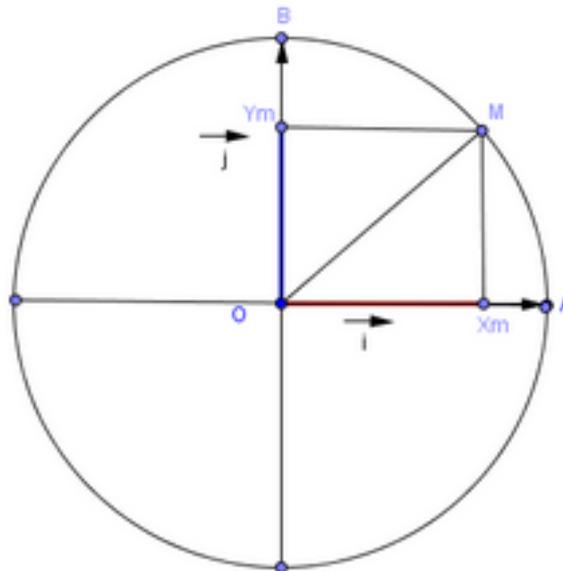
2.2 Comment repérer un point sur ce cercle ?

Il y a trois façons de repérer un point M sur le cercle.

- ➡ Par ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$.
- ➡ Par la mesure de l'angle \widehat{AOM}
- ➡ Par la longueur de l'arc de cercle \widehat{AM} .

- Les coordonnées du point M :

En connaissant les coordonnées $M(x_m; y_m)$ on peut placer ce point dans le repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

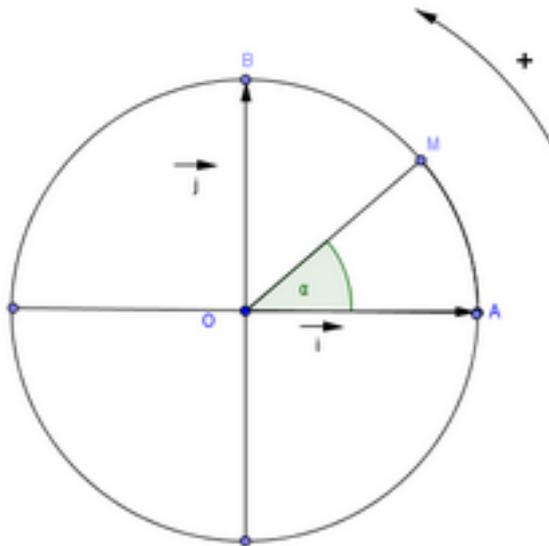


- La mesure de l'angle \widehat{AOM} et le sens direct ou indirect :

En connaissant la mesure de l'angle $\widehat{AOM} = \alpha^\circ$ ($\alpha \geq 0$) on peut placer ce point dans le repère mais il y a deux possibilités. Pour éviter d'avoir ce problème, on va orienter le cercle et lui donner un sens positif.

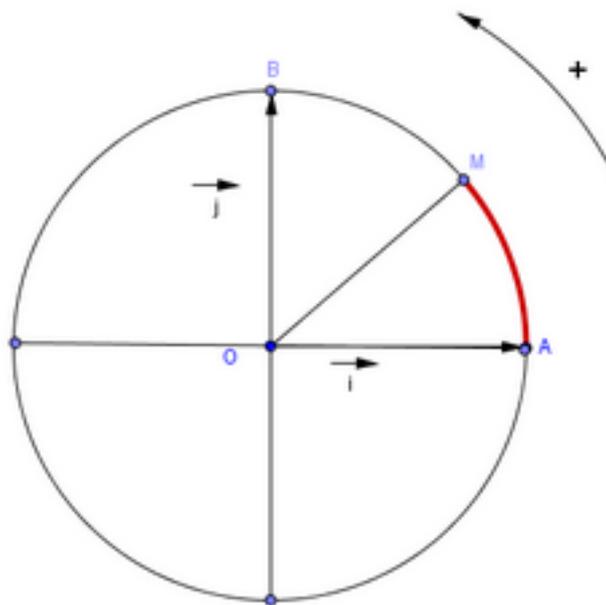
Sens positif (Direct) : Sens inverse des aiguilles d'une montre

Sens négatif (Indirect) : Sens des aiguilles d'une montre



- La mesure de l'angle de vecteurs $(\vec{i}; \widehat{OM})$:

En connaissant la mesure de l'angle de vecteurs $(\vec{i}; \widehat{OM}) = \alpha$ ($\alpha \geq 0$) on peut placer ce point dans le repère



Nous allons, dans ce chapitre, plus particulièrement étudier ce repère avec les arcs de cercle.

Définition : (Cercle trigonométrique)

Le cercle trigonométrique est le cercle de rayon 1 orienté dans le sens direct.

2.3 Les angles en radians

Définition : (Angles en radians)

Soient A et M deux points du cercle trigonométrique de centre O.

La mesure en radians de l'angle $(\vec{i}; \widehat{OM})$ est \pm la longueur de l'arc \widehat{AM}

Quelle est la longueur du cercle trigonométrique ?

On utilise pour cela la formule du périmètre d'un cercle : $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$

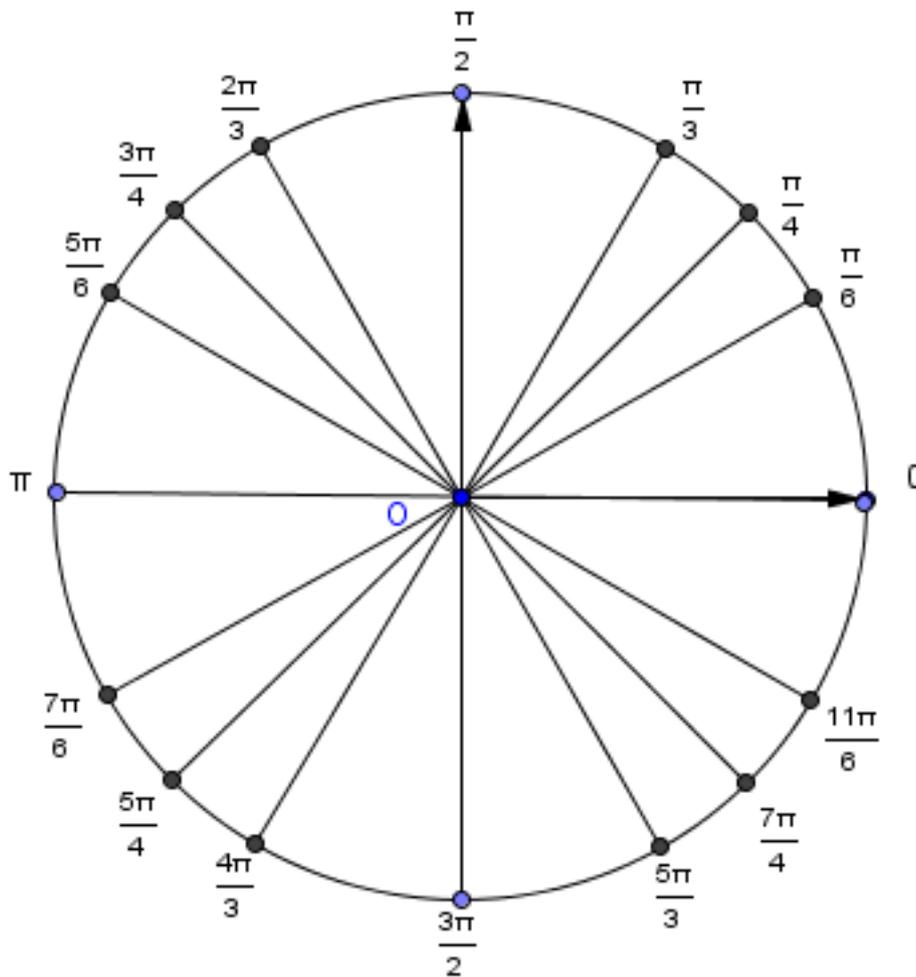
Donc le cercle trigonométrique a une longueur totale de 2π

Si on place un point M sur le cercle, l'arc \widehat{AM} aura donc une longueur qui sera un multiple ou un sous multiple de 2π .

Correspondance entre les angles en degrés et les angles en radians.

Angle en degrés	360	180	90	60	45	30
Angle en radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

A l'aide de ce tableau on peut alors placer sur le cercle trigonométrique les points suivants :



2.4 Mesure principale d'un angle en radian

Activité :

Placer les points M sur le cercle trigonométrique, sachant que \widehat{AOM} est :

$$\frac{\pi}{3} ; \quad \frac{8\pi}{3} ; \quad -\frac{5\pi}{3} ; \quad \frac{13\pi}{3} ; \quad -\frac{11\pi}{3}$$

On remarque que plusieurs mesures d'un angle, définissent les mêmes points. Il y a donc plusieurs valeurs possibles d'un angle en radians.

Nous allons en définir une plus particulièrement : **La mesure principale.**

3 Propriétés des angles de vecteurs

Propriétés des angles orientés de vecteurs :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls et $k \in \mathbb{N}$:

$$\Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{u}}) = 0 + 2k\pi$$

$$\Rightarrow (\widehat{\vec{u}, -\vec{u}}) = (\widehat{-\vec{u}, \vec{u}}) = \pi + 2k\pi$$

$$\Rightarrow (\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = -(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 2k\pi$$

$$\Rightarrow (\widehat{-\vec{u}, \vec{v}}) = \pi + (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 2k\pi$$

$$\Rightarrow (\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) = \pi + (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \text{Si } \alpha \in \mathbb{R}^* \text{ alors } (\widehat{\alpha\vec{u}, \alpha\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 2k\pi$$

$$\Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) + 2k\pi \text{ (Relation de Chasles)}$$

4 La trigonométrie

Activité :

Soit un cercle trigonométrique de centre A .

Soient C et D deux points du cercle tels que $(AC) \perp (AD)$. On note B un point du cercle tel que $\widehat{CAB} = \alpha$ rd.

On note G le projeté orthogonal de B sur $(O; \vec{i})$ et H le projeté orthogonal de B sur $(O; \vec{j})$.

1. Calculer AG en fonction de α .
2. Calculer AH en fonction de α .

4.1 Définition du cosinus et du sinus

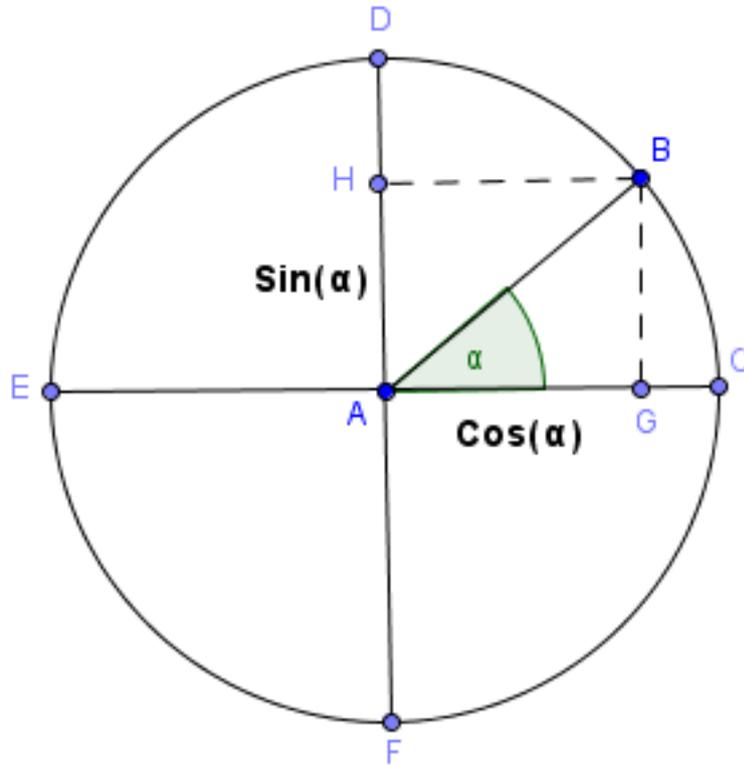
Définition : (Cosinus et Sinus d'un angle)

Soit α un réel quelconque.

Il lui correspond un unique point B du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \alpha + 2k\pi$ rd.

\Rightarrow On note $\cos(\alpha)$ l'abscisse de B dans (O, \vec{i}, \vec{j}) .

\Rightarrow On note $\sin(\alpha)$ l'ordonnée de B dans (O, \vec{i}, \vec{j}) .



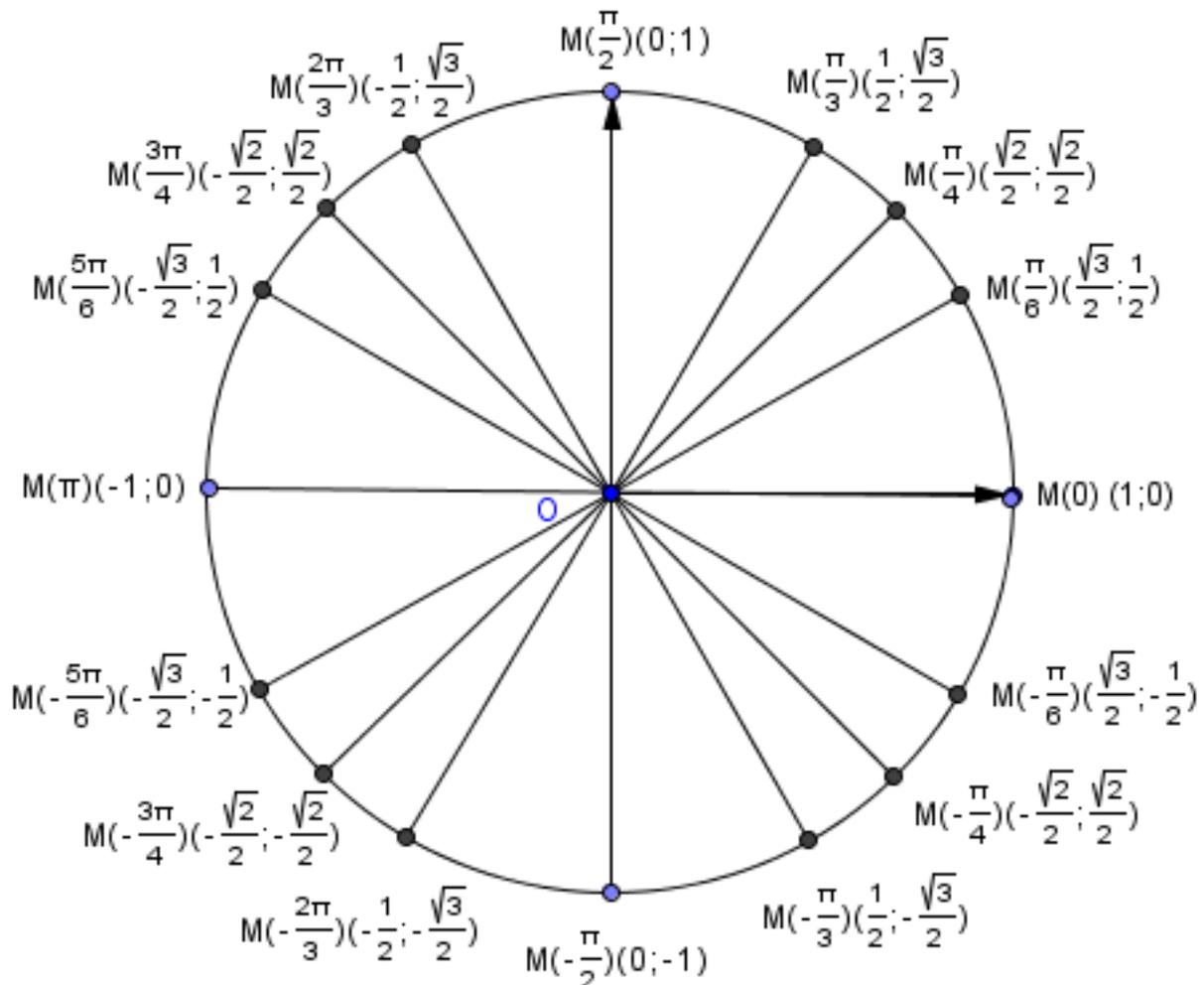
Propriétés :

1. Dans (O, \vec{i}, \vec{j}) alors B a pour coordonnées $(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$

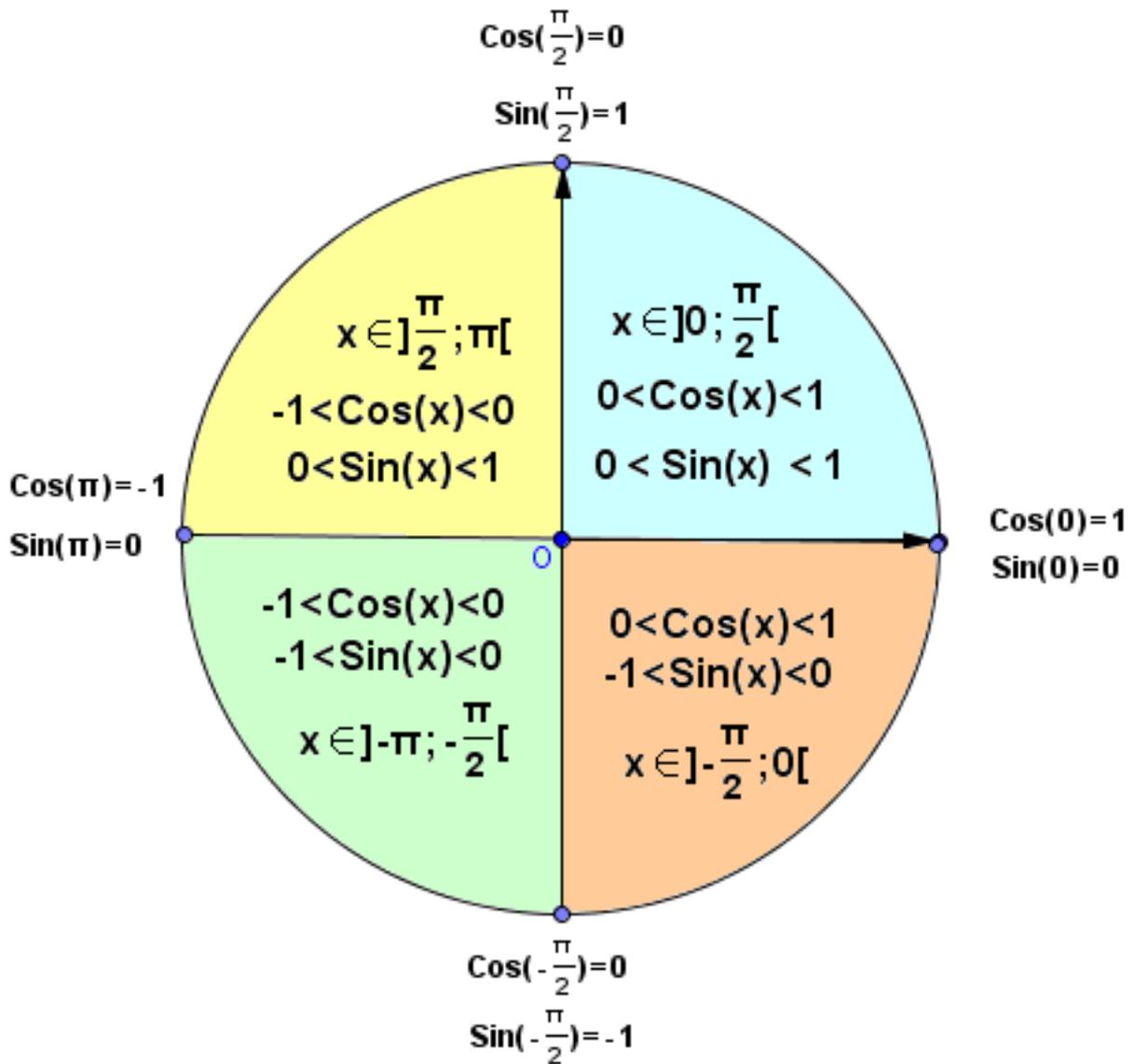
Tableau des valeurs à connaître :

α rd	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Quelques valeurs remarquables :



Représentation des propriétés :



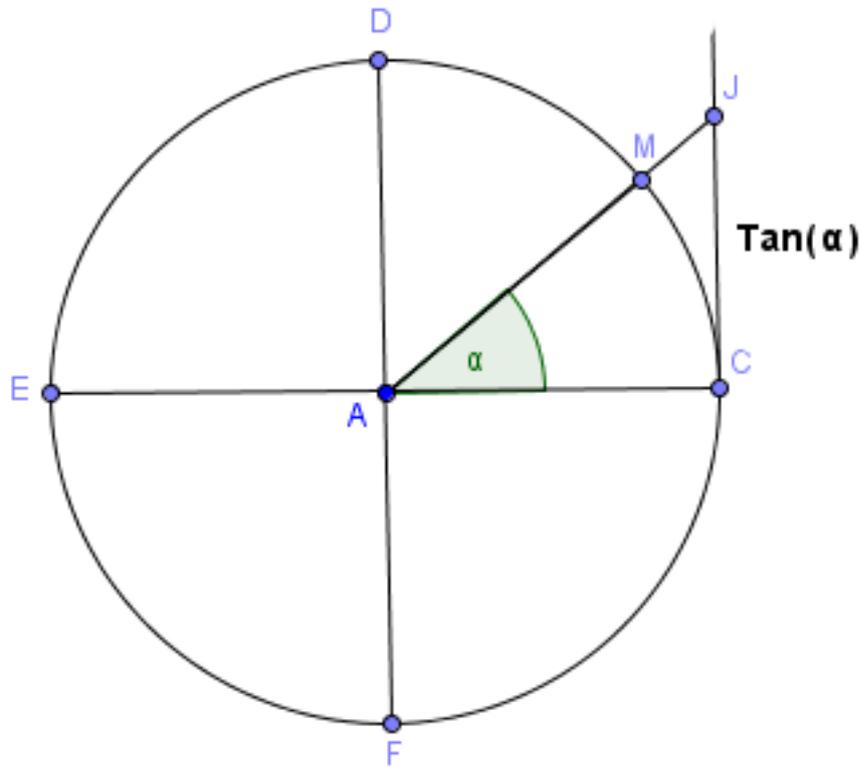
4.2 Définition de la tangente

Activité :

Soit un cercle trigonométrique de centre A .

Soient C et D deux points du cercle tels que $(AC) \perp (AD)$. On note M un point du cercle tel que $\widehat{CAM} = \alpha$ rad et J le point d'intersection entre (AM) et la tangente au cercle passant par C .

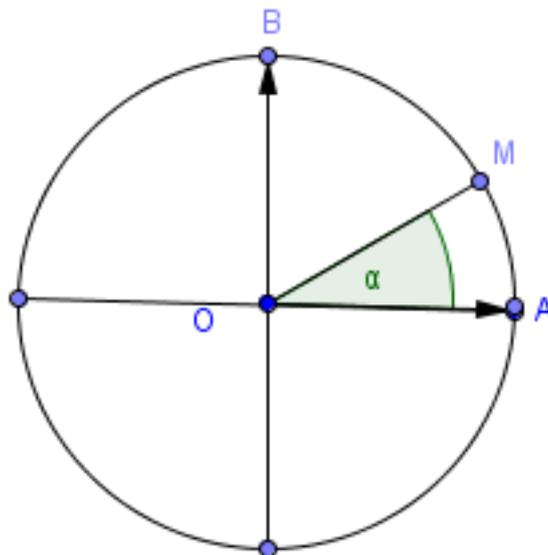
Calculer CJ en fonction de α .



Définition : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, si $\cos(\alpha) \neq 0$ alors $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

4.3 Relations trigonométriques et angles associés

Activité :



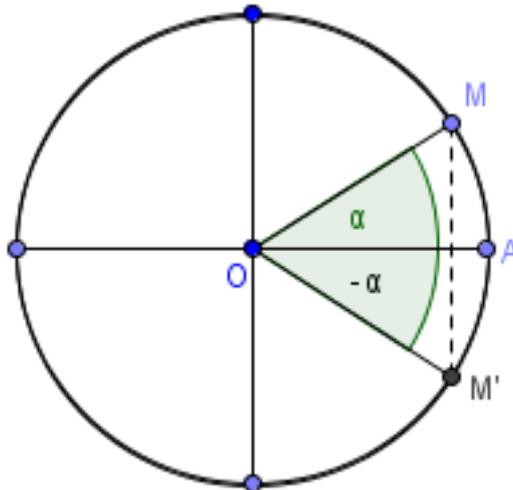
Placer sur le cercle : $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\pi + \alpha$, $\pi - \alpha$, et $-\alpha$

On obtient donc les formules suivantes :

$\cos(2\pi + \alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(2\pi + \alpha) = \sin(\alpha)$
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$

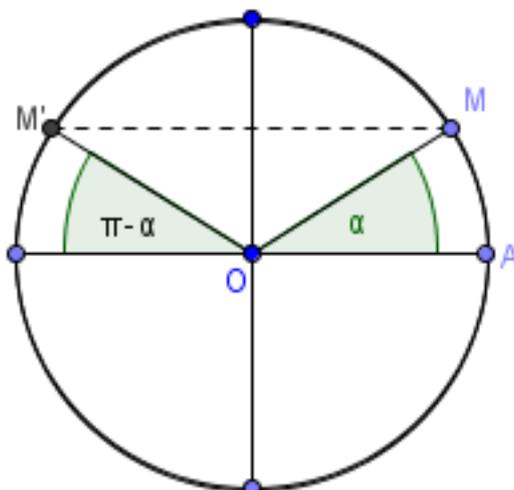
4.4 Les équations trigonométriques

4.4.1 Equation du type $\cos(x) = \cos(a)$ connaissant a



$$\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

4.4.2 Equation du type $\sin(x) = \sin(a)$ connaissant a



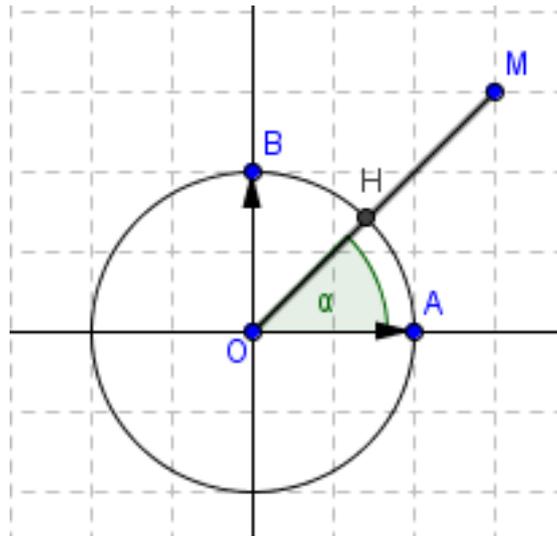
$$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

5 Repérage polaire d'un point du plan

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un repère du plan.

On note G un point quelconque du plan tel que :

$$\begin{aligned} (\widehat{OA, OM}) &= (\widehat{OA, OH}) = \theta \text{ rd} \\ OM &= r \end{aligned}$$



Définition : (Coordonnées polaires)

Le couple $[r, \theta]$ avec $r > 0$ et θ en radians, se nomme les coordonnées polaire de M dans $(O; \vec{i})$

Vocabulaire :

- O est appelé le **pôle**, $[OA)$ l'**axe polaire**, r le **rayon polaire** et θ l'un de ses angles.

Propriétés :

- Si $[r, \theta]$ est un couple de coordonnées polaires de M alors $[r, \theta + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est aussi un couple de coordonnées polaires de M .
- Un repère polaire étant choisi, à tout couple $[r, \theta]$ correspond un et un seul point.

5.1 Comment passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes ?

On note $[r, \theta]$ les coordonnées polaires de M dans $(O; \vec{i})$.

On note $(x_M; y_M)$ les coordonnées cartésiennes de M dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Alors :

$$\begin{cases} x_M = r \cos(\theta) \\ y_M = r \sin(\theta) \end{cases}$$

5.2 Comment passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires ?

On note $[r, \theta]$ les coordonnées polaires de M dans $(O; \vec{i})$.

On note $(x_M; y_M)$ les coordonnées cartésiennes de M dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Alors :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_m^2 + y_m^2} \\ \cos(\theta) = \frac{x_M}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y_M}{r} \end{cases}$$