Exercice 1 :

1. (a) L 'image de 0 par f est $f(0) = -1$
   (b) $f(x) = 0 \iff 5x^2 + 4x - 1 = 0$
   $\Delta = 36 > 0$ donc il y a 2 solutions :$x_1 = \dfrac{-4-6}{10} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-4+6}{10} = 0,2$ soit $S = \{-1; 0,2\}$
   (c) $M(x, y)$ est un point de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses si et seulement si $y = f(x) = 0$ donc, d'après b. $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses ont deux points d'intersection : $A(-1; 0)$ et $B(0,2; 0)$
   $N(x, y)$ est un point de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des ordonnées si et seulement si $x = 0$ et $y = f(x)$ donc, d'après a. $\mathcal{C}_f$ et l'axe des ordonnées ont un point d'intersection : $C(0; -1)$
2. $f(x) = 5x^2+4x-1 = 5[x^2+\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}] = 5[(x+\frac{4}{10})^2-\frac{16}{100}-\frac{1}{5}] = 5[(x+\frac{2}{5})^2-\frac{36}{100}] = 5[(x+\frac{2}{5})^2-\frac{9}{25}]$
   Le sommet de $\mathcal{C}_f$ est le point $\Omega(-\frac{2}{5}; -\frac{9}{5})$.
3. $M(x, y)$ est un point de $\mathcal{C}_f$ et de d si et seulement si $y = f(x) = 4x + 4$
   $5x^2 + 4x - 1 = 4x + 4 \iff 5x^2 - 5 = 0 \iff 5(x + 1)(x - 1) = 0 \iff x = 1$ ou $x = -1$
   $f(1) = 8$ et $f(-1) = 0$ donc $\mathcal{C}_f$ et d ont deux points communs : $E(1; 8)$ et $F(-1; 0)$.

Exercice 2 :

1. $h(0) = 1,6$ donc la balle au départ est à une hauteur de 1,6 mètre.
   $h(1) = 16,6$ donc au bout de 1 seconde, la balle est à 16,6 mètres de haut
   $h(3) = 16,6$ elle est aussi à 16,6 mètres de haut au bout de 3 secondes.
2. (a) $h(t) = 1,6 \iff -5t^2 + 20t = 0 \iff 5t(-t + 4) = 0 \iff t = 0$ ou $t = 4$
   La balle est à 1,6 m du sol au départ et au bout de 4 secondes.
   (b) $h(t) = 21,6 \iff -5t^2 + 20t - 20 = 0 \iff -5(t^2 - 4t + 4) = 0 \iff -5(t-2)^2 = 0 \iff t = 2$
   La balle est à 21,6 m du sol au bout de 2 secondes.
3. $h(t) = 0 \iff -5t^2 + 20t + 1,6 = 0$
   $\Delta = 432 > 0$ donc il y a 2 solutions : $t_1 = \dfrac{-20-12\sqrt{3}}{-10} = \dfrac{-2(10+6\sqrt{3})}{-10} = \dfrac{10+6\sqrt{3}}{5}$
   et $t_2 = \dfrac{-20+12\sqrt{3}}{-10} = \dfrac{-2(10-6\sqrt{3})}{-10} = \dfrac{10-6\sqrt{3}}{5}$
   $t_1 \approx 4,078 > 0$ et $t_2 < 0$ donc la balle retombera au sol au bout d'environ 4 secondes.

Exercice 3 :

(a) $-4x^4 - 63x^2 + 16 = 0$
Si je pose $T = x^2$ alors $T^2 = x^4$ et l'équation s'écrit $-4T^2 - 63T + 16 = 0$
$\Delta = 4225 > 0$ donc il y a 2 solutions :$T_1 = \dfrac{63-65}{-8} = \dfrac{1}{4}$ et $t_2 = \dfrac{63+65}{-8} = -16$
*$x^2 = \dfrac{1}{4} \iff x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$
* $x^2 = -16$ est impossible car pour tout réel x, x^2 est positif ou nul
$S = \left\{\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right\}$

(b) $\dfrac{1}{x} = 3x - 4$

Cette équation a un sens si et seulement si $x \neq 0$ donc je la résous sur $\mathbb{R}^*$

$\dfrac{1}{x} = 3x - 4 \iff \dfrac{3x^2 - 4x - 1}{x} = 0 \iff 3x^2 - 4x - 1 = 0$ sur $\mathbb{R}^*$

$\Delta = 28 > 0$ donc il y a 2 solutions : $x_1 = \dfrac{4 - 2\sqrt{7}}{6} = \dfrac{2 - \sqrt{7}}{3} \neq 0$ et $x_2 = \dfrac{4 + 2\sqrt{7}}{6} = \dfrac{2 + \sqrt{7}}{3} \neq 0$

donc $S = \left\{\dfrac{2 - \sqrt{7}}{3}; \dfrac{2 + \sqrt{7}}{3}\right\}$

(c) $7x^3 - 14x^2 = 0 \iff x^2(7x - 14) = 0 \iff x^2 = 0$ ou $7x - 14 = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$

$S = \{0; 2\}$

Exercice 4 :

1. $A = \cos x + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \cos(x + \pi) + \cos\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos x - \sin x - \cos x + \sin x = 0$
2. $B = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - \cos(x + \pi) + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - \sin(x - \pi) = -\cos x + \cos x + \sin x + \sin x = 2\sin x$

Exercice 5 :

1. On sait que $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{16}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{16}\right) = 1$ donc

   $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{16}\right) = 1 - \dfrac{1}{4}(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) = \dfrac{4 - 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4} = \dfrac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4}$

   $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{16}\right) = \dfrac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4} \iff \sin\left(\dfrac{\pi}{16}\right) = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}$ ou $\sin\left(\dfrac{\pi}{16}\right) = -\dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}$

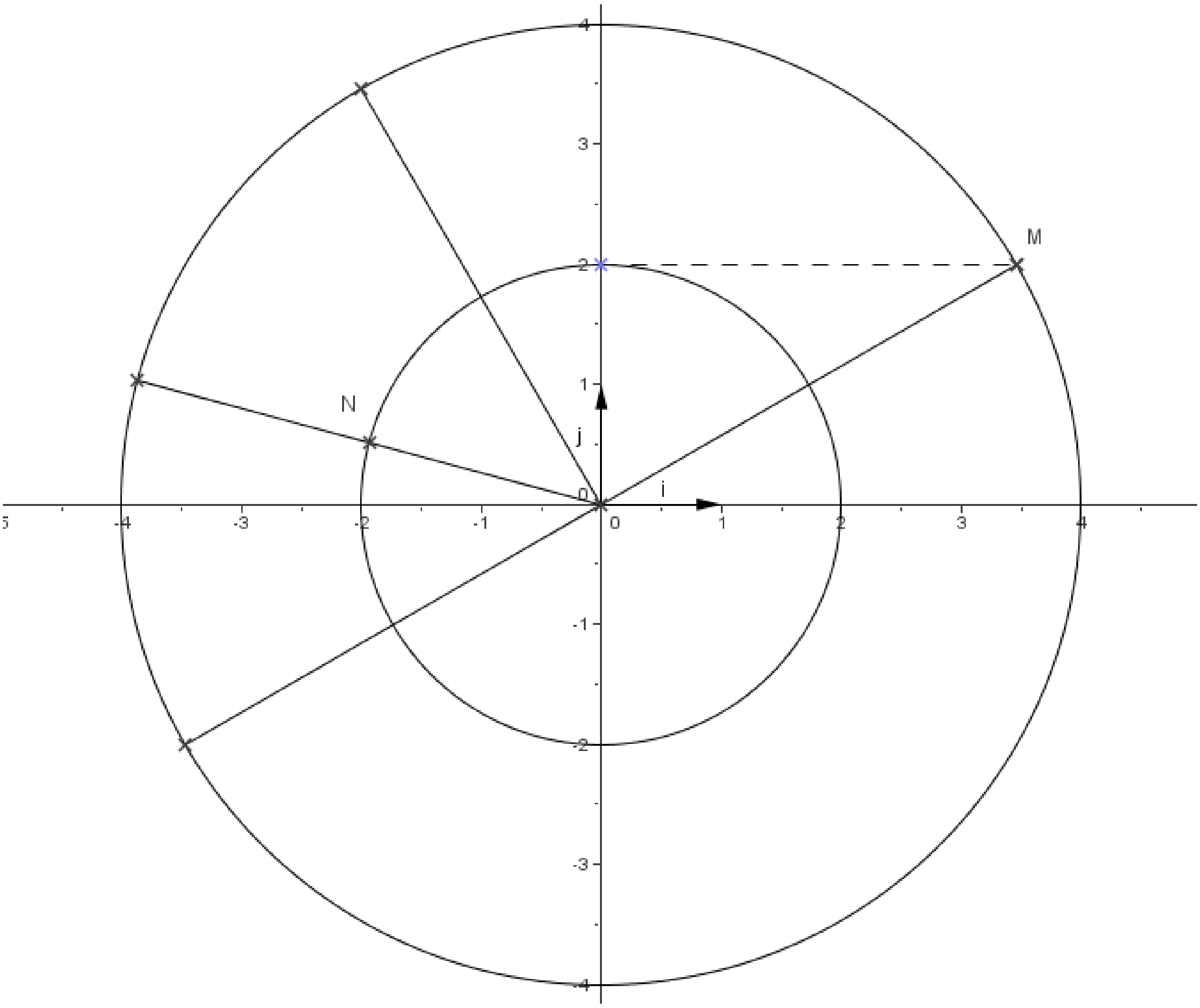
   or $\dfrac{\pi}{16} \in]0; \pi[$ donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{16}\right) > 0$ d'où $\sin\left(\dfrac{\pi}{16}\right) = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$
2. $\sin\left(\dfrac{17\pi}{16}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{16} + \pi\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{16}\right) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

   $\cos\left(-\dfrac{7\pi}{16}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{16} - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{16}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$
3. Pour tout réel x, $(\cos x + \sin x)^2 - 1 = \cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x - 1 = 1 + 2\cos x \sin x - 1 = 2\cos x \sin x$

Exercice 6 :

1. (a) $OM = \sqrt{12 + 4} = 4$ et $\theta = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$ est tel que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ soit $\theta = \dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

   donc un couple de coordonnées polaires de M dans $(O, \overrightarrow{i})$ est $[4; \dfrac{\pi}{6}]$



(b)

2. (a) Ci-dessus

   (b) $ON = \frac{1}{2}OM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$

   donc un couple de coordonnées polaires de N dans $(O, \overrightarrow{OM})$ est $[\frac{1}{2}; \frac{3\pi}{4}]$

   (c) $ON = 2\|\overrightarrow{i}\|$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} = \frac{11\pi}{12}$

   donc un couple de coordonnées polaires de N dans $(O, \overrightarrow{i})$ est $[2; \frac{11\pi}{12}]$

3. $3\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $3\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$

   donc $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$ sont les coordonnées cartésiennes de P dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.