Exercice 1 :

1. (a) Domaine de définition de f :
$f(x)$ existe si et seulement si $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ donc $D_f = [1;+\infty[$.
Domaine de définition de g :
$g(x)$ existe si et seulement si $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ donc $D_g =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.
Domaine de définition de $g \circ f$:
$(g \circ f)(x)$ existe si et seulement si $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$
$\Leftrightarrow x \in [1;+\infty[$ et $\sqrt{x-1} \neq 1$
$\Leftrightarrow x \in [1;+\infty[$ et $x \neq 2$
donc $D_{g \circ f} = [1;2[\cup]2;+\infty[$.

(b) $(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = \dfrac{f(x)-2}{f(x)-1} = \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}-1} = \dfrac{x-3-\sqrt{x-1}}{x-2}$

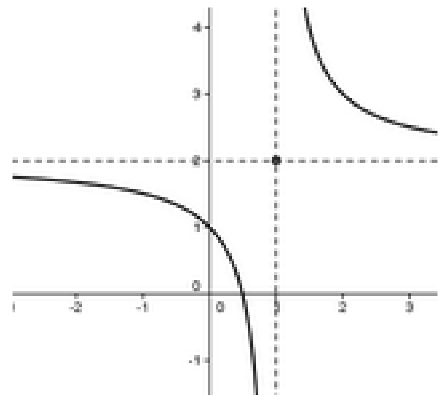
2. (a) $x \xmapsto{t} x+1 \xmapsto{h} (x+1)^2 \xmapsto{g} 2-3(x+1)^2$
On définit donc f, h et g de la façon suivante :
$g : x \mapsto 2-3x$ définie sur $\mathbb{R}$.
$h : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
$t : x \mapsto x+1$ définie sur $\mathbb{R}$.

(b) On note a et b deux nombres réels tels que $a < b$
Or la fonction t est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $t(a) < t(b)$
La fonction h est la fonction carré strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Regardons si $t(a)$ et $t(b)$ sont positifs ou negatifs.
Il y a deux cas possibles :
▷ $a+1 < 0 \Leftrightarrow a < -1$ (Idem pour $b+1$).
Si $a \in]-\infty;-1]$ et $b \in]-\infty;-1]$ alors $t(a) \in \mathbb{R}^-$ et $t(b) \in \mathbb{R}^-$
or la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ donc
$h \circ t(a) > h \circ t(b)$
or la fonction g est stictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc
$g \circ h \circ t(a) < g \circ h \circ t(b)$
donc $f(a) < f(b)$ et f est strictement croissante sur $]-\infty;-1]$.
▷ $a+1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -1$ (Idem pour $b+1$ sauf que $b+1 > 0$).
Si $a \in [-1;+\infty[$ et $b \in [-1;+\infty[$ alors $t(a) \in \mathbb{R}^+$ et $t(b) \in \mathbb{R}^+$
or la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ donc
$h \circ t(a) < h \circ t(b)$
or la fonction g est stictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc
$g \circ h \circ t(a) > g \circ h \circ t(b)$
donc $f(a) > f(b)$ et f est strictement décroissante sur $[-1;+\infty[$.

3. On note a, b, c et d quatre réels.
On note $f : x \mapsto ax+b$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g : x \mapsto cx+d$ définie sur $\mathbb{R}$.
$D_{f \circ g} = \mathbb{R}$
et
$(f \circ g)(x) = f(cx+d) = a(cx+d)+b = acx+ad+b$ donc $(f \circ g)(x) = \alpha x + \beta$
avec $\alpha = ac$ et $\beta = ad+d$
Donc $f \circ g$ est une fonction affine.

Exercice 2 :

1. (a) On note $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ la fonction inverse.
$\mathcal{C}_f$ est l'image de $\mathcal{C}_g$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$



(b)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

2. h et $-3h$ ont des variations contraires et $-3h$ et $-3h+1$ ont les même variations donc h et $-3h+1$ ont des variations contraires.

x	-5		-3		0		2
			16				1
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-11				-5		

Exercice 3 :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $3(x+a)^2+b = 3(x^2+2ax+a^2)+b = 3x^2+6ax+3a^2+b$

Par identification avec $f(x)=3x^2-30x+77$ on obtient :
$6a=-30$ et $3a^2+b=77 \Leftrightarrow a=-5$ et $b=2$
Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=3(x-5)^2+2$.

2. On note g la fonction carré.
$\mathcal{C}_f$ est l'image de $\mathcal{C}_{3g}$ par la translation de vecteur $5\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}$.
Donc $\mathcal{C}_f$ est une parabole de sommet $S(5;2)$, tournée vers le haut, et d'axe de symétrie la droite d'équation $x=5$.
3. f est définie sur $\mathbb{R}$.
D'après la description de la courbe de f, la fonction est ni paire, ni impaire puisque $\mathcal{C}_f$ n'est pas symétrique par rapport à $(O,\ \overrightarrow{j})$, ni par rapport à $O(0;0)$.

Exercice 4 :

1. $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1 \Leftrightarrow \sin^2(\alpha)=1-\cos^2(\alpha)$
$\sin^2(\alpha)=1-\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=\dfrac{16}{16}-\dfrac{1+5-2\sqrt{5}}{16}=\dfrac{16-6+2\sqrt{5}}{16}$
donc $\sin^2(\alpha)=\dfrac{10+2\sqrt{5}}{16}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$
$\Leftrightarrow \sin(\alpha)=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$ ou $\sin(\alpha)=-\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$
Or $\alpha\in]-\pi;0[$ donc $\sin(\alpha)=-\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{8}}=-\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
2. A l'aide de la caclulatrice on obtient $n=-0,4=-\dfrac{2}{5}$ donc $\alpha=-\dfrac{2\pi}{5}$.

Exercice 5 :

$ABCD$ est un carré de centre O donc (AC) et (BD) sont perpendiculaires, $AC=BD$ puis $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu. De plus (BD) et (AC) sont les bissectrices des angles droits. On note k et k' un entier relatifs.

$(\widehat{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}})=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$

$(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{OB}})=(\widehat{\overrightarrow{BC};-\overrightarrow{BO}})+2k\pi=\pi+(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BO}})+2k\pi=\pi+\dfrac{\pi}{4}+2k\pi=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi=-\dfrac{3\pi}{4}+2k'\pi$

$(\widehat{\overrightarrow{DO};\overrightarrow{AC}})=(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})+2k\pi=(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OC}})+2k\pi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

$(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{AC}})=(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}})+2k\pi=\pi+2k\pi$

$(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CD}})=(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BA}})+2k\pi=0+2k\pi$

$(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{AD}})=(\widehat{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{AD}})+2k\pi=\pi+(\widehat{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DA}})+2k\pi=\pi-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi=\dfrac{3\pi}{4}+2k'\pi$

Exercice 6 :

1. $(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AG}})+(\widehat{\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AB}})+(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}})=(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB}})+(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}})+2k\pi=(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{DE}})+2k\pi$ d'après la relation de Chasles.
2. $ABFG$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GF}$.
$CDEF$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CF}$.
donc
$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}})=(\widehat{\overrightarrow{GF},\overrightarrow{CF}})+2k\pi=(\widehat{\overrightarrow{FG},\overrightarrow{FC}})+2k\pi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$.
3. D'après les deux questions précédentes :
$(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{DE}})=(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AG}})+(\widehat{\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AB}})+(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}})+2k\pi$
donc
$(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{DE}})=-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}+2k\pi=0+2k\pi$
$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont donc colinéaires et dans le même sens donc $(AH)//(DE)$.