Exercice 1 :

On note f_1 la fonction $x \mapsto \dfrac{2x^2-1}{x^3-x}$.

1. $f_1(x)$ existe si et seulement si $x^3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) \neq 0$
   $\Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 1$ et $x \neq -1$
   Donc $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-1;0;1\}$
2. D_{f_1} est symétrique par rapport à 0 donc on peut étudier $f_1(-x)$:
   $f_1(-x) = \dfrac{2(-x)^2-1}{(-x)^3-(-x)} = \dfrac{2x^2-1}{-x^3+x} = \dfrac{2x^2-1}{-(x^3-x)} = -\dfrac{2x^2-1}{x^3-x}$
   donc f_1 est impaire et $\mathcal{C}_{f_1}$ est symétrique par rapport à $O(0;0)$.

Exercice 2 :

1. On nomme a et b deux nombres réels de l'intervalle $]1;+\infty[$ tels que $a < b$
   La fonction $x \mapsto 1-x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $1-a > 1-b$
   Comme $a \in]1;+\infty[$ alors $a > 1$ donc $1-a < 0$ et $1-a \in \mathbb{R}^{*-}$
   de plus $a \in]1;+\infty[$ alors $a > 1$ donc $1-a < 0$ et $1-a \in \mathbb{R}^{*-}$
   Or la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur R^{*-} donc $\dfrac{1}{1-a} < \dfrac{1}{1-b}$
   La fonction $x \mapsto 3-5x$ est affine et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $3 - \dfrac{5}{1-a} > 3 - \dfrac{5}{1-b}$
   donc $f_2(a) > f_2(b)$ et f_2 est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.
2. On nomme a et b deux nombres réels de l'intervalle $]-\infty;1[$ tels que $a < b$.
   $f_3(a) - f_3(b) = 3a^2 - 6a - 5 - 3b^2 + 6b + 5 = 3a^2 - 3b^2 - 6a + 6b = 3(a^2-b^2) - 6(a-b) =$
   $3(a-b)(a+b) - 6(a-b) = 3(a-b)(a+b-2)$
   Étudions le signe de $3(a-b)(a+b-2)$
   ▷ Signe de $a-b$: On sait que $a < b$ donc $a-b < 0$ (négatif)
   ▷ Signe de $a+b-2$: On sait que $a < 1$ et $b < 1$ donc $a+b < 2$ donc $a+b-2 < 0$ (négatif)
   On a donc $f_3(a) - f_3(b) > 0$ donc $f_3(a) > f_3(b)$ et f_3 est trictement décroissante sur $]-\infty;1[$
3. On note $g : x \mapsto \sqrt{x}$ alors $f_4(x) = -3g(x) + 5$
   D'après le cours $x \mapsto -3g(x)$ a les variations inverses de g et donc $x \mapsto -3g(x)+5$ aussi.
   Donc f_4 est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

Exercice 3 :

On note $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et $f_5 : x \mapsto \dfrac{4x-5}{x^2}$

1. Définir la fonction $\dfrac{f_4}{f_5}$ (Ensemble de définition et expression en fonction de x)

   ▷ $D_{\frac{f_4}{f_5}} = D_{f_4} \cap D_{f_5} \setminus \{\text{valeurs de } x \text{ telles que } f_5(x) \neq 0\} = \mathbb{R}^* \cap \mathbb{R}^* \setminus \left\{\dfrac{5}{4}\right\} = \mathbb{R}^* \setminus \left\{\dfrac{5}{4}\right\}$.

   ▷ $\left(\dfrac{f_4}{f_5}\right)(x) = \dfrac{f_4(x)}{f_5(x)} = \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{4x-5}{x^2} = \dfrac{1}{4x-5}$
2. Définir la fonction $f_5 \circ f_4$ (Ensemble de définition et expression en fonction de x)

   ▷ $(f_5 \circ f_4)(x)$ existe si et seulement si $f_5(f_4(x))$ existe donc
   $$\left\{\begin{array}{l} x \in D_{f_4} \\ f_4(x) \in D_{f_5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^* \\ \dfrac{1}{x^2} \in \mathbb{R}^* \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq 0 \\ \dfrac{1}{x^2} \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq 0 \end{array}\right.$$
   donc $D_{f_5 \circ f_4} = \mathbb{R}^*$.

   ▷ $(f_5 \circ f_4)(x) = f_5(f_4(x)) = f_5\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{x^2} - 5}{\dfrac{1}{x^4}} = \dfrac{4-5x^2}{x^2} \times \dfrac{x^4}{1} = x^2(4-5x^2) = -5x^4 + 4x^2$

Exercice 4 :

On note f_6 la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$ par $f_6(x) = -\dfrac{2(6x-7)}{3x+4}$

1. $f_6(x) = -\dfrac{2(6x-7)}{3x+4} = \dfrac{-12x+14}{3x+4} = \dfrac{-4(3x+4)+30}{3x+4} = -4 + \dfrac{30}{3x+4}$
   donc $a = -4$ et $b = 30$.
2. $x \mapsto 3x+4 \mapsto \dfrac{1}{3x+4} \mapsto -4 + \dfrac{30}{3x+4}$
   On pose $m : x \mapsto 3x+4$ puis $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \mapsto -4+30x$
   alors on a $f_6 = g \circ h \circ m$
3. On nomme a et b deux nombres réels de l'intervalle $\left]-\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ tels que $a < b$
   m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $m(a) < m(b)$
   $\triangleright$ $m(a) = 3a+4$ or $x > -\dfrac{4}{3}$ donc $3x > -4$ donc $3x+4 > 0$ et $m(a) \in \mathbb{R}^{+*}$
   $\triangleright$ $m(a) = 3a+4$ or $x > -\dfrac{4}{3}$ donc $3x > -4$ donc $3x+4 > 0$ et $m(a) \in \mathbb{R}^{+*}$
   or h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$ donc $h \circ m(a) > h \circ m(b)$
   or g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $g \circ h \circ m(a) > g \circ h \circ m(b)$
   donc $f_6(a) > f_6(b)$ et f_6 est strictement décroissante sur $\left]-\dfrac{4}{3};+\infty\right[$.