Exercice 1 :

1. $p = \frac{1}{2}gt_1^2 = 5t_1^2$
2. $p = 320t_2$
3. $4,5 = t_1 + t_2 \iff t2 = 4,5 - t_1$.
4. On a donc $p = 320t_2 = 320(4,5 - t_1) = 1440 - 320t_1$ et $p = 5t_1^2$
   donc $5t_1^2 = 1440 - 320t_1 \iff 5t_1^2 + 320t_1 - 1440 = 0$
   Donc t_1 est une des solutions de l'équation : $5t^2 + 320t - 1440 = 0$
5. $\Delta = b^2 - 4ac = (320)^2 - 4(5)(-1440) = 131200 = (40\sqrt{82})^2$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles distinctes :
   $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-320+40\sqrt{82}}{10} \approx 4,22$
   $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-320-40\sqrt{82}}{10} \approx -68,22$
   Un temps étant positif, on a $t_1 = \frac{-320+40\sqrt{82}}{10} \approx 4,22$ s.
   De plus $p = 5t_1^2 = 5\left(\frac{-320+40\sqrt{82}}{10}\right)^2 \approx 89,11$ m.

Exercice 2 :

Résoudre les équations et le système d'équations suivants :

1. $x^2 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = [-(\sqrt{3}-\sqrt{2})]^2 - 4(1)(-\sqrt{6}) = 3 - 2\sqrt{6} + 2 + 4\sqrt{6} = 3 + 2 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles distinctes :
   $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$
   $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$
   donc $S = \{-\sqrt{2};\sqrt{3}\}$
2. $4\cos^2\alpha + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos\alpha - \sqrt{6} = 0$
   On pose le changement de variable : $x = \cos\alpha$ et on obtient la nouvelle équation : $4x^2 + 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = [2(\sqrt{3}-\sqrt{2})]^2 - 4(4)(-\sqrt{6}) = 4(3+2-\sqrt{6}) + 16\sqrt{6} = 4(3+2+2\sqrt{6}) = [2(\sqrt{3}+\sqrt{2})]^2$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles distinctes :
   $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2(\sqrt{3}-\sqrt{2})-2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2} = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
   Il reste donc à résoudre les deux équations suivantes :

   ▷ $\cos\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos\alpha_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \iff \begin{cases} \alpha_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \alpha_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

   ▷ $\cos\alpha_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos\alpha_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \iff \begin{cases} \alpha_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \alpha_1 = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

   Donc $S = \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$
3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ xy = \sqrt{10} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 7 \\ xy = \sqrt{10} \end{cases} \iff \begin{cases} (x+y)^2 = 7 + 2\sqrt{10} = (\sqrt{5}+\sqrt{2})^2 \\ xy = \sqrt{10} \end{cases}$
   Il faut donc résoudre deux systèmes :

   ▷ $\begin{cases} x + y = \sqrt{5}+\sqrt{2} \\ xy = \sqrt{10} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{5}+\sqrt{2} - y \\ xy = \sqrt{10} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{5}+\sqrt{2} - y \\ (\sqrt{5}+\sqrt{2}-y)y = \sqrt{10} \end{cases}$
   $\iff \begin{cases} x = \sqrt{5}+\sqrt{2} - y \\ (\sqrt{5}+\sqrt{2})y - y^2 = \sqrt{10} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{5}+\sqrt{2} - y \\ y^2 - (\sqrt{5}+\sqrt{2})y + \sqrt{10} = 0 \end{cases}$
   Résolvons l'équation du second degré : $y^2 - (\sqrt{5}+\sqrt{2})y + \sqrt{10} = 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{5}+\sqrt{2})^2 - 4(+\sqrt{10})(1) = 5 + 2 - 2\sqrt{10} = (\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles distinctes :
   $y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{2} = \sqrt{5}$
   $y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})-(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{2} = \sqrt{2}$
   On a donc $(\sqrt{5};\sqrt{2})$ et $(\sqrt{2};\sqrt{5})$ comme couples de solutions.

$\triangleright \begin{cases} x+y=-\sqrt{5}-\sqrt{2} \\ xy=\sqrt{10} \end{cases} \iff \begin{cases} x=-\sqrt{5}-\sqrt{2}-y \\ xy=\sqrt{10} \end{cases} \iff \begin{cases} x=-\sqrt{5}-\sqrt{2}-y \\ (-\sqrt{5}-\sqrt{2}-y)y=\sqrt{10} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=-\sqrt{5}-\sqrt{2}-y \\ (-\sqrt{5}-\sqrt{2})y-y^2=\sqrt{10} \end{cases} \iff \begin{cases} x=-\sqrt{5}-\sqrt{2}-y \\ y^2-(-\sqrt{5}-\sqrt{2})y+\sqrt{10}=0 \end{cases}$

Résolvons l'équation du second degré : $y^2-(-\sqrt{5}-\sqrt{2})y+\sqrt{10}=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-\sqrt{5}-\sqrt{2})^2-4(\sqrt{10})(1)=5+2-2\sqrt{10}=(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$

$\Delta>0$ donc il y a deux solutions réelles distinctes :

$y_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{(-\sqrt{5}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{2}=-\sqrt{2}$

$y_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{(-\sqrt{5}-\sqrt{2})-(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{2}=-\sqrt{5}$

On a donc $(-\sqrt{5};-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2};-\sqrt{5})$ comme couples de solutions.

Les solutions du systèmes sont donc :

$$S=\{(-\sqrt{5};-\sqrt{2});(-\sqrt{2};-\sqrt{5});(\sqrt{5};\sqrt{2});(\sqrt{2};\sqrt{5})\}$$

Exercice 3 :

Étudier la fonction $x\mapsto x^2+x-20$.

1. $f(x)$ existe pour toutes les valeurs de x réelles donc $D_f=\mathbb{R}$
2. $f(x)=x^2+x-20=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}-20=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}-\dfrac{80}{4}=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{81}{4}$
3. On note $g: x\mapsto x^2$ la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$.
   On a $f(x)=g\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{81}{4}$
   Les variations de f sont donc identiques aux variations de g et le tableau des variations de f est :

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-81/4$	$\nearrow$	

4. La courbe de f est une parabole de sommet $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{81}{4}\right)$ et orientée vers le haut.
5. $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{81}{4}=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{9}{2}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{9}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{9}{2}\right)=(x+5)(x-4)$
   - $\triangleright$ Intersection avec l'axe des abscisses :
     Les points d'intersection entre la courbe de f et l'axe des abscisses, sont de la forme $(x;0)$.
     Il faut donc résoudre l'équation $f(x)=0$
     $f(x)=0 \Leftrightarrow (x+5)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=-5$ ou $x=4$
     Donc les points d'intersection sont $A(-5;0)$ et $B(4;0)$
   - $\triangleright$ Intersection avec l'axe des ordonnées :
     Le point d'intersection entre la courbe de f et l'axe des ordonnées, est de la forme $(0;f(0))$.
     Il faut donc chercher l'image de 0 par la fonction f :
     $f(0)=-20$ donc le point d'intersection entre la courbe de f et l'axe des ordonnées est $C(0;-20)$
6. Courbe repésentative de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$: