Exercice 1 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4$

1. $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$ on a :
   $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$
2. On note a et b deux nombres de $[0; +\infty[$ tels que $a < b$
   Signe de $a - b$:
   On sait que $a < b$ donc $a - b < 0$
   Signe de $a + b$:
   On sait que $a \geq 0$ et $b > 0$ alors $a + b > 0$
   Signe de $a^2 + b^2$:
   $a^2 \geq 0$ et $b^2 > 0$ donc $a^2 + b^2 > 0$
   Conclusion :
   On a donc $f(a) - f(b) < 0$ donc $f(a) < f(b)$ donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
3. On a $D_f = \mathbb{R}$
   $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$ donc f est paire et $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à $(O; \overrightarrow{j})$
   Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

Exercice 2 :

1. $f(x) - g(x) = \dfrac{1}{1 + x^4} - \dfrac{1}{1 + x^2} = \dfrac{x^2 - x^4}{(1 + x^4)(1 + x^2)} = \dfrac{x^2(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^4)(1 + x^2)}$.
2. $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \dfrac{x^2(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^4)(1 + x^2)} \geq 0 \Leftrightarrow (1 - x)(1 + x) \geq 0$
   Dressons le tableau des signes de $(1 - x)(1 + x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1 - x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$1 + x$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(1 - x)(1 + x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Donc $S = [-1; 1]$

Exercice 3 :
On considère la fonction f définie par : $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

1. $f(x)$ existe si et seulement si $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2 - x)(2 + x) \geq 0$
   Dressons le tableau des signes de $(2 - x)(2 + x)$:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2 - x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$2 + x$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(2 - x)(2 + x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   donc $D_f = [-2; 2]$
2. D_f est symétrique par rapport à 0
   $f(-x) = (-x)\sqrt{4 - (-x)^2} = -x\sqrt{4 - x^2} = -f(x)$
   donc f est impaire et $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à $O(0; 0)$
3. $[f(x)]^2 - 4 = x^2(4 - x^2) - 4 = 4x^2 - x^4 - 4 = -(x^2 - 2)^2$
   Pour tout $x \in [-2; 2]$, $f(x)^2 - 4 \leq 0$
   Donc $f(x)^2 \leq 4$
   Or $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$
   donc $|f(x)| \leq 4$
   donc $f(x) \leq 2$ pour tout x tels que $f(x) \geq 0$ donc si $x \in [0; 2]$
   donc 2 est le maximum de f sur $[0; 2]$.

Exercice 4 :
On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 12x^2 - 21x + 30$

1. Après division euclidienne on obtient $f(x) = (x-1)(3x^2 - 9x - 30)$
2. $f(x) = (x-1)(3x^2 - 9x - 30) = 3(x-1)(x^2 - 3x - 10)$
   Après division euclidienne on obtient que $x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$
   donc $f(x) = 3(x-1)(x-5)(x+2)$
3. Pour trouver les coordonnées des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et la droite des ordonnées on cherche l'image de 0 par la fonction f :
   $f(0) = 30$ donc il y a un seul point $A(0; 30)$.
4. Pour trouver les coordonnées des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et la droite des abscisses on cherche les antécédents de 0 par la fonction f :
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x-5)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 5$ ou $x = -2$
   Donc il y a trois points $B(1; 0)$, $C(5; 0)$ et $D(-2; 0)$