Exercice :

On considère les fonctions $f : x \mapsto 4 - 3(x-1)^2$ et $g : x \mapsto 8 + \dfrac{2}{x-1}$

1. Donner le domaine de définition des deux fonctions f et g.
   $f(x)$ existe pour toute les valeurs de x donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$.
   $g(x)$ existe si et seulement si $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ donc $\boxed{D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$
2. Démontrer, à l'aide de la première méthode du cours, que f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ puis qu'elle est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$
   Pour tout réels a et b :
   $f(a) - f(b) = [4 - 3(a-1)^2] - [4 - 3(b-1)^2] = 4 - 3(a-1)^2 - 4 + 3(b-1)^2 = 3[(b-1)^2 - (a-1)^2] = 3(b-a)(a+b-2)$
   (a) On note a et b deux nombres de $[1; +\infty[$ tels que $a < b$
   Signe de $a - b$: $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$ (positif)
   Signe de $a + b - 2$: $a \geq 1$ et $b > 1$ donc $a + b > 2$ donc $a + b - 2 > 0$ (positif)
   donc $f(a) - f(b) > 0$ donc $f(a) > f(b)$ donc f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$
   (b) On note a et b deux nombres de $]-\infty; 1]$ tels que $a < b$
   Signe de $a - b$: $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$ (positif)
   Signe de $a + b - 2$: $b \leq 1$ et $a < 1$ donc $a + b < 2$ donc $a + b - 2 < 0$ (négatif)
   donc $f(a) - f(b) < 0$ donc $f(a) < f(b)$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$
3. Démontrer, à l'aide de la deuxième méthode du cours, que g est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ puis qu'elle est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$
   (a) On note a et b deux nombres de $]-\infty; 1[$ tels que $a < b$
   or $x \mapsto x - 1$ est affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $a - 1 < b - 1$
   de plus $a < 1$ et $b < 1$ donc $a - 1$ et $b - 1$ sont des nombres de $\mathbb{R}^{*-}$
   or $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$ donc $\dfrac{1}{a-1} > \dfrac{1}{b-1}$
   or $x \mapsto 8 + 2x$ est affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $8 + frac2a - 1 > 8 + \dfrac{2}{b-1}$
   donc $f(a) > f(b)$ et f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$.
   (b) On note a et b deux nombres de $]1; +\infty[$ tels que $a < b$
   or $x \mapsto x - 1$ est affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $a - 1 < b - 1$
   de plus $a > 1$ et $b > 1$ donc $a - 1$ et $b - 1$ sont des nombres de $\mathbb{R}^{*+}$
   or $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$ donc $\dfrac{1}{a-1} > \dfrac{1}{b-1}$
   or $x \mapsto 8 + 2x$ est affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $8 + frac2a - 1 > 8 + \dfrac{2}{b-1}$
   donc $f(a) > f(b)$ et f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.
4. Dresser les tableaux des variations de f et de g.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
			4		
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

5. On note $h_1 : x \mapsto f(x) - 2$ et $h_2 : x \mapsto -2 \times f(x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
			2		
$h_1(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h_2(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
			-8		

6. On note $m_1 : x \mapsto g(x) + 7$ et $m_2 : x \mapsto 7 \times g(x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$m_1(x)$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$m_2(x)$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

7. On note $k : x \mapsto \dfrac{2f(x) - 6f(-x)}{3}$
   Étudier la parité de la fonction k et en déduire d'éventuelles éléments de symétrie de la courbe représentative de la fonction k dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   Comme $D_f = \mathbb{R}$ alors $D_k = \mathbb{R}$ et $k(-x) = \dfrac{2f(-x) - 6(f(-(-x)))}{3} = \dfrac{2f(-x) - 6f(x)}{3}$
   donc f est ni paire ni impaire.