Exercice 1 :

1. f est décroissante sur $[1;2]$ et $1 \leq \dfrac{3}{2} \leq 2$ donc $f(1) \geq f\left(\dfrac{3}{2}\right) \geq f(2)$ soit $f\left(\dfrac{3}{2}\right) \in [-3;3]$.

   Comme $f(-2) = -\dfrac{1}{2}$, on ne peut pas affirmer que $f\left(\dfrac{3}{2}\right) \leq f(-2)$

2. f est croissante sur $[-2;0]$. -1 et 0 sont deux nombres de $[-2;0]$ avec$-1 \leq 0$ donc $f(-1) \leq f(0)$.

   f est décroissante sur $[-4;-2]$ et $-4 \leq -3 \leq -2$ donc $f(-4) \geq f(-3) \geq f(-2)$ soit $f(-3) \in [-\dfrac{1}{2};2]$.
   f est croissante sur $[2;5]$ et $2 \leq 4 \leq 5$ donc $f(2) \leq f(4) \leq f(5)$ soit $f(4) \in [-3;-1]$.
   Comme $-1 < -\dfrac{1}{2}$, on a $f(-3) > f(4)$.

3. $-2 < 0$ donc f et $-2f$ ont des variations contraires, $-2f$ et $-2f-1$ ayant les mêmes variations, f et g ont des variations contraires.

x	-4		-2		1		2		5
			0				5		
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	-5				-7				1

Exercice 2 :*Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. **a)** f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, donc $f-g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $(f-g)(x) = x^2-4-(2x-1) = x^2-2x-3$.
   $f-g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(f-g)(x) = x^2-2x-3$.

   b) $(x-3)(ax+b) = ax^2+bx-3ax-3b = ax^2+x(b-3a)-3b$

   En identifiant à $(f-g)(x) = x^2-2x-3$, on a : $\begin{cases} a = 1 \\ b-3a = -2 \\ -3b = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

   donc $(f-g)(x) = (x-3)(x+1)$

   c) $f(x) \geq g(x) \iff f(x)-g(x) \geq 0 \iff (x-3)(x+1) \geq 0$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x-3$		-	|	-	0	+	
$x+1$		-	0	+	|	+	
$(x-3)(x+1)$		+	0	-	0	+	

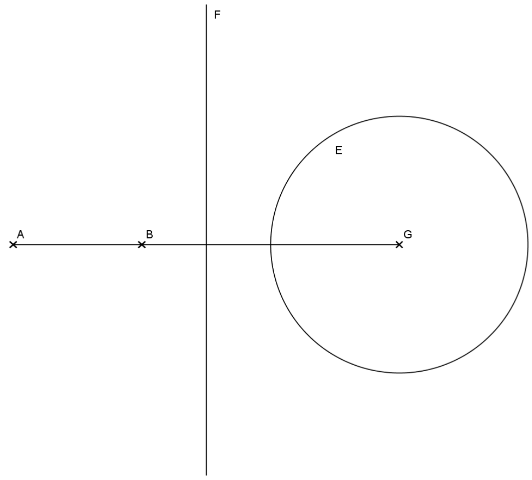
   donc $f(x) \geq g(x) \iff x \in]-\infty;-1] \cup [3;+\infty[$.

2. **a)** f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 et pour tout réel x,
   $f(-x) = (-x)^2-4 = x^2-4 = f(x)$ donc f est paire sur $\mathbb{R}$.
   $g(x) = \sqrt{2-x}$ existe $\iff 2-x \geq 0 \iff -x \geq -2 \iff x \leq 2$ donc g est définie sur $]-\infty;2]$.
   Cet ensemble n'est pas symétrique par rapport à 0 donc g est ni paire ni impaire sur $]-\infty;2]$.

   b) $\dfrac{f}{g}(x)$ existe $\iff x \in]-\infty;2]$ et $g(x) \neq 0 \iff x < 2$.
   $\dfrac{f}{g}$ est définie sur $]-\infty;2[$ par $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{2-x}}$.
   $\dfrac{g}{f}(x)$ existe $\iff x \in]-\infty;2]$ et $f(x) \neq 0$.
   Or pour tout réel x, $x^2 \geq 0$ donc $x^2+1 \geq 1 > 0$ donc pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.
   $\dfrac{g}{f}(x)$ est définie sur $]-\infty;2]$ par $\dfrac{g}{f}(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2+1}$.

Exercice 3 :

1. G est le barycentre de $(A,2);(B,-3)$ donc $2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} \iff -\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$



2. G est le barycentre de $(A,2);(B,-3)$ donc pour tout point M du plan, $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MG}$.
   Ainsi, M est un point de $E \iff \|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\|=3 \iff \|-\overrightarrow{MG}\|=3 \iff MG=3 \iff M$ est un point du cercle de centre G et de rayon 3 cm.
   E est le cercle de centre G et de rayon 3 cm.
3. G est le barycentre de $(A,2);(B,-3)$ donc pour tout point M du plan, $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MG}$.
   Ainsi, M est un point de $F \iff \|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\|=AM \iff \|-\overrightarrow{MG}\|=AM \iff MG=AM$
   F est la médiatrice de $[AG]$.
4. $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0}$.
   Ainsi, C est le barycentre de $(A,2);(B,1)$ ou encore, par homogénéité,
   C est le barycentre de $(A,1);(B,\frac{1}{2})$, soit $b=\frac{1}{2}$.
5. Je vais calculer : $2\overrightarrow{GA'}-3\overrightarrow{GB'}$:
   Comme $\overrightarrow{A'G}=2\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{B'G}=2\overrightarrow{BG}$, on a :
   $2\overrightarrow{GA'}-3\overrightarrow{GB'}=2\times 2\overrightarrow{AG}-3\times 2\overrightarrow{BG}=2\left(2\overrightarrow{AG}-3\overrightarrow{BG}\right)=2.\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$ car G est le barycentre de $(A,2);(B,-3)$
   $2\overrightarrow{GA'}-3\overrightarrow{GB'}=\overrightarrow{0}$ donc G est aussi le barycentre de $(A',2);(B',-3)$.

Exercice 4 :

1. G le barycentre de $(A,3)(B,12-x)$ existe $\iff 3+12-x\neq 0 \iff x\neq 15$.
   G existe pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{15\}$
2. $G=A \iff G$ barycentre de $(A,3)(B,0) \iff x-12=0 \iff x=12$. $G=A$ pour $x=12$.
3. G le barycentre de $(A,3)(B,12-x)$ donc
   $3\overrightarrow{GA}+(12-x)\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} \iff 3\overrightarrow{GA}+(12-x)\overrightarrow{GA}+(12-x)\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0} \iff$
   $(3+12-x)\overrightarrow{GA}+(12-x)\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0} \iff (15-x)\overrightarrow{AG}=(12-x)\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AG}=\frac{12-x}{15-x}\overrightarrow{AB}$.
4. $\overrightarrow{AG}=\frac{12-x}{15-x}\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraire $\iff \frac{12-x}{15-x}<0$

x	$-\infty$		12		15		$+\infty$
$x-12$		+	0	-	|	-	
$x-15$		+	|	+	0	-	
(x-12)(x-15)		+	0	-	||	+	

$\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraire si $x\in]12;15[$.