Les polynômes du second degré

Niveau : Première S

Vincent OBATON, Enseignant de mathématiques au lycée Stendhal de Grenoble

I. Les trinômes du second degré

1. Grille d'auto-évaluation

A : Acquis au jour d'aujourd'hui
EA : En cours d'acquisition au jour d'aujourd'hui
NA : Non acquis au jour d'aujourd'hui.

	Savoir, Savoir-faire et compétences	**A**	**EA**	**NA**
AN201	Savoir trouver la forme canonique d'un trinôme du second degré.			
AN202	Savoir résoudre une équation du second degré à une inconnue.			
AN203	Savoir résoudre une équation se ramenant au second degré.			
AN204	Savoir résoudre une équation bicarrée.			
AN205	Savoir résoudre une équation par changement de variable.			
AN206	Savoir résoudre un système se ramenant au second degré.			
AN207	Savoir factoriser un trinôme du second degré			
AN208	Savoir résoudre une inéquation du second degré.			
AN209	Savoir résoudre une inéquation plus complexe.			
AN210	Savoir trouver des racines évidentes d'un polynôme.			
AN211	Savoir factoriser un polynôme de degré supérieur ou égal à 3			
AN212	Savoir décrire la courbe d'une fonction polynôme du second degré.			
AN213	Savoir décrire les variations dune fonction polynôme du second degré.			
AN214	Savoir résoudre un problème sur les polynômes.			

2. Exercices résolus dans ce chapitre

AN201 Savoir trouver la forme canonique d'un trinôme du second degré.

1. Trouver une forme canonique du trinôme : x^2+3x-5
2. Trouver une forme canonique du trinôme : $2x^2-3x+5$
3. Trouver une forme canonique du trinôme : $-2x^2-4x+1$
4. Trouver une forme canonique du trinôme : $3x^2-24x+48$

AN202 Savoir résoudre une équation du second degré à une inconnue.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $5x^2+3=0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $5x^2-3=0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $6x^2-8x=0$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2+x-6=0$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4x^2-24x+36=0$
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2+2x+4=0$
7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4x^2+8x+3=0$
8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2+9x+7=0$

AN203 Savoir résoudre une équation se ramenant au second degré.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(x+3)(x-5)=(2x-5)(x+2)$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2-4\sqrt{2}x+6=0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{8x-11}{x-3}=x-3$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2+5.10^{14}x-5.10^{29}=0$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{2x-1}{x+3}=\frac{4x-5}{x-1}$

AN204 Savoir résoudre une équation bicarrée par changement de variable.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4-9x^2+20=0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4-1=0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4+3x^2-4=0$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $16x^4-24x^2+5=0$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4-2{,}26x^2+0{,}0225=0$
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4+3x^2+2=0$
7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4-14x^2+49=0$

AN205 Savoir résoudre une équation par changement de variable .

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation : $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-5=0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation : $\frac{1}{x^2}=9$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation : $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{4}=0$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4\cos^2\theta-2(1+\sqrt{3})\cos\theta+\sqrt{3}=0=0$
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin^2\theta-\frac{1}{4}=0$
7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2\sin^2\theta+(2-\sqrt{3})\sin\theta-\sqrt{3}=0$
8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin^2\theta-\sin\theta=0$
9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $t-\sqrt{t}-12=0$
10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $t+10\sqrt{t}+25=0$
11. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $t+2\sqrt{t}+7=0$

AN206 Savoir résoudre un système se ramenant au second degré.

1. Résoudre dans $\boxed{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ le système : $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-35 \end{cases}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} x+y=-\frac{5}{2} \\ xy=-\frac{3}{2} \end{cases}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases}$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} \cos\theta_1+\cos\theta_2=\frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \cos\theta_1\times\cos\theta_2=-\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

5.Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} AB^2+BC^2=50 \\ AB\times BC=14 \end{cases}$

AN207 Savoir factoriser un trinôme du second degré.

1. Factoriser $A=-3x^2-6x+24$
2. Factoriser $B=3x^2-4$
3. Factoriser $C=2x^2+34x+132$
4. Factoriser $D=-x^2+\sqrt{3}x+18$
5. Factoriser $E=-20x^2+10x$

AN208 Savoir résoudre une inéquation du second degré.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2-2x-15\leqslant 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4x^2-28x+49>0$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x^2+5<0$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2-0{,}03x-0{,}034>0$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-x^2+2\pi x+3\pi^2>0$

AN209 Savoir résoudre une inéquation plus complexe.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{4}{(x-2)^2}\geqslant 1$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{(x-3)(x^2+3x-4)}{x^2+5}<0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{x-2}{x+3}>\dfrac{x+1}{x+2}$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x^2+21x+100}\leqslant 10$

AN210 Savoir trouver des racines évidentes d'un polynôme.

1. Trouver une racine évidente de $P(x)=x^4+3x^3-9x^2+6x-1$
2. Trouver une racine évidente de $P(x)=x^3+x^2-3x-3$
3. Trouver une racine évidente de $P(x)=x^4-8x^3+8x^2-x$
4. Trouver une racine évidente de $P(x)=x^5-5x^3+4x$

AN211 Savoir factoriser un polynôme de degré supérieur à 3.

1. Factoriser le polynôme $P(x)=x^3-13x+12$
2. Factoriser le polynôme $P(x)=x^3-(2\sqrt{5}+3)x^2+(6\sqrt{5}-15)x+45$
3. Factoriser le polynôme $P(x)=x^4+x^3-9x^2-7x+14$
4. Factoriser le polynôme $P(x)=x^4+7x^3+11x^2-7x-12$
5. Factoriser le polynôme $P(x)=x^{-}x^4-4x+4$
6. Factoriser le polynôme $P(x)=x^5-10x^3+9x$
7. Factoriser le polynôme $P(x)=x^8-1$

AN212 Savoir décrire la courbe d'une fonction polynôme du second degré.

1. Décrire la courbe de la fonction $f:x\longmapsto x^2+6x-4$
2 Décrire la courbe de la fonction $g:x\longmapsto \dfrac{-1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{7}{18}$
3. Décrire la courbe de la fonction $h:x\longmapsto -3x^2+24x-\dfrac{95}{2}$

AN213 Savoir décrire les variations dune fonction polynôme du second degré.

1. Étudier les variations de $f:x\longmapsto 4x^2-8x-3$
2. Étudier les variations de $g:x\longmapsto -2x^2-3$
3. Étudier les variations de $h:x\longmapsto -5x^2+10x-5$

AN214 Savoir résoudre un problème sur les polynômes.

Problème 1 : Calcul de la somme $S_n = 1\times 2 + 2\times 3 + \ldots + n\times(n+1)$

On note $S_n = 1\times 2 + 2\times 3 + \ldots + n\times(n+1)$

1. Trouver un polynôme P de degré 3 tel que $P(x+1) - P(x) = x(x+1)$ et $P(0) = 1$
2. En déduire que $S_n = P(n+1) - P(1)$
3. Démontrer alors que $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
4. Calculer S_{1000}

Problème 2 : Polynôme symétrique $P(x) = 5x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 7x + 5$

On note $P(x) = 5x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 7x + 5$

1. 0 est-il une racine de P ?
2. On note α une racine de P. Montrer que $\dfrac{1}{\alpha}$ est aussi une racine de P.
3. Démontrer que $\alpha^2 - 7\alpha + 2 - \dfrac{7}{\alpha} + \dfrac{5}{\alpha^2} = 0$
4. On note $\beta = \left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)$. Démontrer que $-5\beta^2 - 7\beta - 8 = 0$.
5. Trouver alors les racines de P .

Problème 3 : Étude de $P(x) = x^4 + (k-5)x^3 + (6 - 6k^2 - 5k)x^2 + 6k(5k+1)x - 36k^2$

$P(x) = x^4 + (k-5)x^3 + (6 - 6k^2 - 5k)x^2 + 6k(5k+1)x - 36k^2$

1. Trouver les valeurs de k pour que 0 soit une racine évidente de $\boxed{P}$.
2. Trouver les valeurs de k pour que 1 soit une racine évidente de $\boxed{P}$.
3. Trouver les valeurs de k pour que -1 soit une racine évidente de $\boxed{P}$.
4. 2 est-il une racine évidente de P ?
5. Démontrer que 3 est une racine évidente de P.
6. Résoudre $x^4 + (k-5)x^3 + (6 - 6k^2 - 5k)x^2 + 6k(5k+1)x - 36k^2 = 0$

3. Le cours et les démonstrations

a. Définitions et vocabulaire

Trinôme du second degré

Définition 1 :

Un trinôme du second degré est un polynôme de degré 2 de la forme :

$P(x)=ax^2+bx+c$, a $\in \mathbb{R}^*$, b $\in \mathbb{R}$ et c $\in \mathbb{R}$

Exemples :

$P_1(x)=2x^2+6x+5$

$P_2(x)=-x^2+7x-10$

$P_3(x)=4x^2-16$

$P_4(x)=5x^2$

Forme canonique d'un trinôme du second degré

On souhaite trouver une expression littéral égale en faisant apparaître une seule fois la variable x .

Exemple :

- $P_1(x)=x^2-2x+1$

On a évidemment $P_1(x)=(x-1)^2$

- $P_2(x)=2x^2+8x+16$

On a $P_2(x)=2(x^2+4x+8)$, or $x^2+4x=(x+2)^2-4$ donc

$P_2(x)=2[(x+2)^2-4+8]=2[(x+2)^2+4]$ donc

$P_2(x)=2(x+2)^2+8$

Étude du cas général :

On note $P(x)=ax^2+bx+c$ un polynôme de degré 2 avec a ≠ 0.

Comme a ≠ 0 alors on peut factoriser par a :

$P(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

or $x^2+\frac{b}{a}x$ est le début d'une égalité remarquable car

$$x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$$

donc, en remplaçant $x^2+\frac{b}{a}x$ par $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$

on obtient donc

$$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-b^2 4a^2+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Définition 2 :

Si P est un polynôme tel que $P(x)=ax^2+bx+c$ avec a ∈ ℝ* , b ∈ ℝ et c ∈ ℝ alors on peut écrire P sous **forme canonique** :

Forme 1 : $$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

ou

Forme 2 : $$P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

Il n'est pas utile de savoir par coeur ces deux formules. Il faut surtout retrouver les formes canoniques par le calcul.

⇒ La forme canonique numéro 1 va nous permettre de factoriser les trinômes du second degré et de résoudre des équations et inéquations que l'on ne savait pas résoudre auparavant.

⇒ La forme canonique numéro 2 va nous permettre de tirer des conclusions sur le représentation graphique et sur les variations des fonctions polynômes du second degré.

b. Équations et inéquations du second degré

Équations du second degré

On sait déjà résoudre des équations du second degré quand on peut factoriser à l'aide d'un facteur commun ou à l'aide des identités remarquables.

Exemples :

- $x^2-4=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$ donc $S=\{-2\,;2\}$
- $x^2=3 \Leftrightarrow x^2-3=0 \Leftrightarrow (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$ donc $S=\{-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\}$
- $x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=4$ donc $S=\{0\,;4\}$

Maintenant nous voudrions savoir résoudre les autres équations du second degré comme par exemple : $x^2+3x+2=0$.

Exemple : Résoudre dans ℝ l'équation $x^2+3x+2=0$

On va pour cela, chercher la forme canonique numéro 1 du trinôme x^2+3x+2 puis ensuite factoriser l'expression trouvée.

$$x^2+3x+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{8}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

donc

$$x^2+3x+2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+2)(x+1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-2 \text{ ou } x=-1 \text{ donc } S=\{-2;-1\}$$

Cas général :

On souhaite résoudre dans ℝ l'équation $ax^2+bx+c=0$ avec a ≠ 0 :

⇒ Premier cas : Si c=0

$$ax^2+bx+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2+bx=0 \quad \Leftrightarrow \quad x(ax+b)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \text{ ou } x=-b$$

donc $S=\langle 0\,;-b\rangle$

⇒ Deuxième cas : Si b=0 et c ≠ 0

$$ax^2+bx+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+\frac{c}{a}=0$$

Premier sous cas :

Si $\frac{c}{a}>0$ alors il n'y a aucune solution et S=Ø

Deuxième sous cas :

Si $\frac{c}{a}<0$ alors $x^2+\frac{c}{a}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-\left|\frac{c}{a}\right|=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x+\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right)\left(x-\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \quad x=\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|} \quad \text{ou} \quad x=-\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|} \quad \text{donc} \quad S=\left\{-\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|};\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right\}$$

⇒ Troisième cas : Si b ≠ 0 et c ≠ 0

$$ax^2+bx+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

Pour pouvoir factoriser cette expression il faut étudier le signe de b^2-4ac :

Dans toute la suite de la résolution, on notera **discriminant du trinôme**, le nombre :

$$\Delta=b^2-4ac$$

<u>Premier sous cas</u> : Si $\Delta = 0$

$$ax^2+bx+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x+\frac{b}{2a}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{b}{2a}$$

Il y a donc une seule solution réelle : $S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

Deuxième sous cas : Si $\Delta < 0$

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \quad a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0 \;\Leftrightarrow\; \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}<0$$

or dans ℝ un carré n'est jamais négatif, donc il n'y a pas de solution dans ℝ et $S=\emptyset$.

Attention : En Terminale ces équations auront des solutions dans un ensemble plus grand que ℝ que l'on nomme ℂ (l'ensemble des nombres complexes).

Troisième sous cas : Si $\Delta > 0$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\Leftrightarrow \quad a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right]\times\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\times\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Il y a deux solutions réelles distinctes $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

donc $S=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\,;\,\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Conclusion :

Soit ax^2+bx+c un trinôme du second degré tel que a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0. On note discriminant du trinôme le nombre $\Delta=b^2-4ac$ alors il y a trois cas possibles pour résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$:

⇒ Premier cas : Si $\Delta=0$ Il y a une seule solution dans ℝ : $S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

⇒ Premier cas : $Si\ \Delta<0$ Il n'y a pas de solution dans ℝ et $S=\emptyset$.

⇒ Premier cas : $Si\ \Delta>0$ Il y a deux solutions réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Inéquation du second degré

On sait déjà résoudre les inéquations du second degré lorsqu'on peut les factoriser à l'aide d'un facteur commun ou à l'aide des identités remarquables.

Petit rappel :

Pour résoudre une inéquation du second degré il faut faire apparaître tous les termes dans le même membre, factoriser l'expression obtenue et ensuite faire un tableau de signe.

Exemple :

Résoudre dans ℝ l'inéquation $:(x-1)(2x+3)-(x-1)(3x-5)\leqslant 0$

$(x-1)(2x+3)-(x-1)(3x-5) \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)[(2x+3)-(3x-5)]\leqslant 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(-x+8)\leqslant 0$

Dressons le tableau de signe de $(x-1)(-x+8)$:

- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
- $-x+8=0 \Leftrightarrow x=8$

x	$-\infty$ 1 8 $+\infty$
x-1	- 0 + | +
-x+8	+ | + 0 -
$f'(x)$	$-$ 0 + 0 $-$

Donc l'ensemble des x pour lesquels $(x-1)(-x+8)\leqslant 0$ est

$$S=]-\infty;1]\cup[8;+\infty[$$

Nous savons aussi résoudre les inéquations du type :

$x^2-5<0$ $4x^2\geqslant 5x$ $(x-2)^2-4\leqslant 0$ et $(3x-4)^2>9(x+2)^2$

A faire pour vous amuser et réviser ....

Maintenant nous voudrions savoir comment résoudre les autres inéquations du second degré comme par exemple : $x^2+3x+2\geqslant 0$

Exemple : Résoudre dans ℝ l'inéquation $x^2+3x+2\geqslant 0$

On va pour cela, chercher la forme canonique numéro 1 du trinôme x^2+3x+2 puis ensuite factoriser l'expression trouvée.

$$x^2+3x+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{8}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

donc

$$x^2+3x+2\geqslant 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\geqslant 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)\geqslant 0$$

Il faut donc dresser le tableau de signe de $(x+2)(x+1)$:

- $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$
- $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$ -2 -1 $+\infty$
$x+2$	- | - 0 +
$x+1$	- 0 + | +
$f'(x)$	+ 0 - 0 +

Donc l'ensemble des x pour lesquels $(x+1)(x+2)\geqslant 0$ est $\boxed{S=]-\infty;-2]\cup[-1;+\infty[}$.

Cas général :
Avant de commencer nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème (Factorisation des trinômes du seconde degré)
On note ax^2+bx+c un trinôme du second degré avec a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0. On note aussi $\Delta=b^2-4ac$
Alors
⇒ Si $\Delta=0$ alors $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$ avec $x_1=-\dfrac{b}{2a}$
⇒ Si $\Delta>0$ alors $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
⇒ Si $\Delta<0$ alors on ne peut pas factoriser ax^2+bx+c dans $\mathbb{R}$

Démonstration :
On part de la forme canonique numéro 1 :

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

⇒ Si $\Delta=0$ alors

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=a(x-x_1)^2 \text{ en posant } x_1=-\frac{b}{2a}$$

⇒ Si $\Delta>0$ alors

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{4a^2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

donc

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

donc

$$ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

donc en posant $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ on obtient

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

⇒ Si $\Delta<0$ alors

$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4a^2}\right]$ qui n'est pas factorisable dans ℝ

Maintenant que nous savons factoriser les trinômes du second degré, nous pouvons étudier leur signe en dressant un tableau de signe :

⇒ Si $\Delta=0$ alors

$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=a(x-x_1)^2$ en posant $x_1=-\frac{b}{2a}$

donc le tableau de signe de ax^2+bx+c est :

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$a(x-x_1)^2$		Signe de a	0	Signe de a	

⇒ Si $\Delta>0$ alors $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ avec

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Donc le tableau de signe de ax^2+bx+c est :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$x-x_1$		-	|	-	0	+	
$x-x_2$		-	0	+	|	+	
$a(x-x_1)(x-x_2)$		Signe de a	0	Signe de -a	0	Signe de a	

⇒ Si $\Delta<0$ alors $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4a^2}\right]$

donc ax^2+bx+c est toujours du signe de a et ne s'annule pas sur ℝ.

Donc son tableau de signe est :

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		Signe de a	

Exemple :

Résoudre dans r l'inéquation suivante : $x^2+x-30<0$

x^2+x-30 n'est pas une identité remarquable et ne se factorise pas à l'aide d'un facteur commun.
Calculons le discriminant du trinôme :
$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-30)=1+120=121=11^2$
On trouve donc que $\Delta>0$ et a=1.
$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+11}{2}=5$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-11}{2}=-6$
donc on obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		-6		5		$+\infty$
$1(x-5)(x+6)$		+	0	-	0	+	

c. Les polynômes

Vocabulaire et définitions

Définition 3 :

On appelle **polynôme de degré n**, et on les nomme $\boxed{P(x)}$, une expression littérale en x de la forme.

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0 \text{ avec } a_0\neq0$$

Exemples :

- $P(x)=3x^2+5x+7$ est un polynôme de degré 2.
- $P(x)=3x^8+5x^5+7x^2-3$ est un polynôme de degré 8.
- $P(x)=x^3-8$ est un polynôme de degré 3.

Définition (Racine d'un polynôme)

On nomme racine (ou zéro) d'un polynôme P tout réel α tel que $P(\alpha)=0$.

Exemples :
- Si $P(x)=x^2-4$ alors les racines de P sont 2 et -2
car $P(2)=0$ et $P(-2)=0$
- Si $P(x)=x^2-2x+1$ alors P admet une seule racine qui est 1 car $P(1)=0$
- Si $P(x)=x^3-8$ alors P admet une seule racine 2 car $P(2)=0$.

Racine de polynômes de degré 1

Définition 4 :

On note $P(x)=ax+b$ avec a ≠ 0.

Alors P admet une seule racine réelle $x_1=-\frac{b}{a}$

Démonstration :

$$P\left(-\frac{b}{a}\right)=a\times\left(-\frac{b}{a}\right)=-b+b=0$$

Exemples :

- $P(x)=2x+3$ admet une seule racine réelle $x_1=-\dfrac{3}{2}$
- $P(x)=-2x+3$ admet une seule racine réelle $x_1=\dfrac{3}{2}$

Racine de polynômes de degré 2

On note $P(x)=ax^2+bx+c$ avec a $\neq$ 0.
On note $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant du polynôme.
D'après les calculs sur les équations, on a :

$\Rightarrow$ Si $\Delta=0$ alors P admet **une seule racine** réelle $x_1=-\dfrac{b}{2a}$

$\Rightarrow$ Si $\Delta\geqslant 0$ alors P admet **deux racines** réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Rightarrow$ Si $\Delta\leqslant 0$ alors P n'admet **aucune racine** réelle.

Racine de polynômes de degré supérieur à 2

Grâce à la résolution des équations de degré 2, on va pouvoir trouver les solutions de certaines équations de degré supérieur à 2. Pour cela nous utiliserons un théorème qu'il faudra admettre en première S.

Théorème (Factorisation des polynômes)

Si α est une racine du polynôme P alors il existe un unique polynôme Q tel que :

Pour tout x $\in \mathbb{R}$, $P(x)=(x-a)\times Q(x)$ avec $d^\circ Q=d^\circ P-1$

Ce théorème est très important et permettra de trouver les racines de polynômes de degré 3 ou 4 ...

Exemples :

- On souhaite trouver les racines de $P(x)=x^3-7a+6$ de degré 3 après avoir vérifié que 1 est une de ses racines.

<u>Vérifions que 1 est une racine de P</u> :
$P(1)=1^3-7\times 1+6=1-7+6=0$ donc 1 est racine de P.

<u>Appliquons maintenant le théorème précédent</u> :

Comme 1 est une racine de P , il existe un unique polynôme Q de degré 2 tel que $P(x)=(x-1)\times Q(x)$.

Si Q est de degré 2 il est de la forme $Q(x)=ax^2+bx+c$ avec a ≠ 0.
donc $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$. Il reste à identifier a, b et c.

$P(x)=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$

Par identification avec $P(x)=x^3-ax+6$, on trouve :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-a=0 \\ c-b=-7 \\ -c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-6 \end{cases} \text{ donc } P(x)=(x-1)(x^2+x-6)$$

Pour trouver les racines de P il suffit de trouver les racines du polynôme du second degré $Q(x)=x^2+x-6$ et de ne pas oublier 1.

Racines du polynôme Q :
$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-6)=1+24=25=5^2$.
donc $\Delta>0$ et Q admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{5^2}}{2}=\frac{-1+5}{2}=2$$

et

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{5^2}}{2}=\frac{-1-5}{2}=-3$$

<u>Conclusion</u> : P admet 3 racines réelles distinctes : -3 ; 1 et 2

• On souhaite trouver les racines de $P(x)=x^3-3x^2+4x-4$ de degré 3 après avoir vérifié que 2 est une de ses racines.
<u>Vérifions que 2 est une de ses racines</u> :
$P(2)=2^3-3\times2^2+4\times2-4=8-12+8-4=0$ donc 2 est racine de P .

<u>Appliquons maintenant le théorème précédent</u> :
Comme 2 est une racine de P, il existe un unique polynôme Q de degré 2 tel que : $P(x)=(x-2)\times Q(x)$

Si Q est de degré 2 il est de la forme $Q(x)=ax^2+bx+c$ avec a ≠ 0 .
donc $P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$ et il reste à identifier a, b et c.

$P(x)=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

Par identification avec $P(x)=x^3-3x^2+4x-4$, on trouve :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-3 \\ c-2b=4 \\ -2c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases} \text{ donc } P(x)=(x-1)(x^2-x+2)$$

Pour trouver les racines de $\boxed{P}$ il suffit de trouver les racines du polynôme du second degré $Q(x)=x^2-x+2$ et de ne pas oublier le 2.

<u>Racine du polynôme</u> Q :

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times2=1-8=-7$

donc $\Delta<0$ et Q n'admet aucune racine réelle.

Conclusion : P admet une seule racine réelle : 2

d. Les fonctions polynômes du second degré

Variations de la fonction $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$

Pour faire cette étude on utilise la forme canonique numéro 2.

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\lambda \text{ avec } \lambda=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$g : x \longmapsto x+\dfrac{b}{2a}$ est une fonction affine croissante sur $I_1=\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ et sur $I_2=\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$

$h : x \longmapsto x^2$ est décroissante sur $f(I_1)=]-\infty;0]$ et croissante sur $f(I_2)=[0;+\infty[$

donc $l : x \longmapsto (g\circ h)(x)=\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ est donc décroissante sur I_1 et croissante sur I_2 .

On a en fait $f : x \longmapsto a\times l(x)-\lambda$

D'après les théorèmes du cours sur les fonctions, on peut en déduire que :

⇒ Si a>0 alors le tableau de variation de *f* est :

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	$\searrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$

⇒ Si a<0 alors le tableau de variation de *f* est :

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	$\nearrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\searrow$

La fonction $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ admet un extremum en $x=-\dfrac{b}{2a}$

Courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \boxed{ax^2+bx+c}$

On note g la fonction $\frac{1}{a}f$ (on peut car a $\neq$ 0)

Alors on a $g(x)=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

d'après le cours sur les fonctions, C_g est l'image de la parabole d'équation $y=x^2$ par la translation de vecteur : $-\frac{b}{2a}\vec{i}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\vec{j}$.

Donc la courbe d'équation $y=ax^2+bx+c$ est une parabole tournée vers le haut si a>0 et vers le bas sir a<0.

Conclusion :

La représentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ est une parabole de sommet $S\left(-\frac{b}{2a};f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ tournée vers le haut si a>0 et tournée vers le bas si a<0. Cette parabole admet pour axe de symétrie la droite verticale d'équation $x=-\frac{b}{2a}$

Exemples

• Étudier les variations et la courbe représentative de $f : x \longmapsto 2x^2+6x+5$

Recherche de la forme canonique :

$2x^2+6x+5=2\left(x^2+3x+\frac{5}{5}\right)$ or x^2+3x est le début d'une identité remarquable car $x^2+3x=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

donc $2x^2+6x+5=2\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}\right]=2\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

donc $2x^2+6x+5=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

<u>Variations de la fonction *f* </u>:

La fonction f a les mêmes variations que la fonction carrée et on est dans le cas où a > 0 donc son tableau de variation est :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$

Courbe représentative de la fonction f :
La courbe représentative de la fonction f est une parabole de sommet $S\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ tournée vers le haut.

• Étudier les variations et la courbe représentative de $f : x \longmapsto -x^2+7\text{x}-10$

Recherche de la forme canonique :
$-x^2+7\text{x}-10=-(x^2-7\text{x}+10)$ or $x^2-7\text{x}$ est le début d'une identité remarquable car $x^2-7\text{x}=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$

donc $-x^2+7\text{x}+10-\left[\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+10\right]=-\left[\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]=-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

donc $-x^2+7\text{a}+10=-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

Variations de la fonction f :
La fonction f a les mêmes variations que la fonction carrée et on est dans le cas où a < 0 donc son tableau de variation est :

x	$-\infty$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$

Courbe représentative de la fonction f :
La courbe représentative de la fonction f est une parabole de sommet $S\left(\frac{7}{2};\frac{9}{4}\right)$ tournée vers le haut.

4. Exercices d'application

AN201 Savoir trouver la forme canonique d'un trinôme du second degré.

1. Trouver une forme canonique du trinôme : x^2+3x-5
On commence par utiliser cette formule :

$$x^2+bx=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

x^2+3x est le début d'une identité remarquable :
$x^2+3x=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

donc $x^2+3x-5=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-5=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{29}{4}$

donc une forme canonique de x^2+3x-5 est :

$$\boxed{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{29}{4}}$$

2. Trouver une forme canonique du trinôme : $2x^2-3x+5$

Factorisons le trinôme par 2 : $2x^2-3x+5=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\right)$

Ensuite on peut utiliser cette formule :

$$x^2+bx=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$x^2-\frac{3}{2}x$ est le début d'une identité remarquable :

$x^2-\frac{3}{2}x=\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}$

donc $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}=\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{5}{2}=\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}$

donc $2x^2-3x+5=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\right)=2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\right]=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{8}$

donc une forme canonique de $2x^2-3x+5$ est :

$$\boxed{2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{8}}$$

3. Trouver une forme canonique du trinôme : $-2x^2-4x+1$

Factorisons le trinôme par -2 : $-2x^2-4x+1=-2\left(x^2+2x-\frac{1}{2}\right)$

Ensuite on peut utiliser cette formule :

$$x^2+bx=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

x^2+2x est le début d'une identité remarquable : $x^2+2x=(x+1)^2-(1)^2=(x+1)^2-1$

donc $x^2+2x-\frac{1}{2}=(x+1)^2-1-\frac{1}{2}=(x+1)^2-\frac{3}{2}$

donc $-2x^2-4x+1=-2\left(x^2+2x-\frac{1}{2}\right)=2\left[(x+1)^2-\frac{3}{2}\right]=-2(x+1)^2+3$

donc une forme canonique de $-2x-4x+1$ est :

$$\boxed{-2(x+1)^2+3}$$

4. Trouver une forme canonique du trinôme : $3x^2-24x+48$

Factorisons le trinôme par 3 : $3x^2-24x+48=3(x^2-8x+16)$
On remarque que $x^2-8x+16$ est directement une identité remarquable, car :
$x^2-8x+16=(x)^2-2(4)(x)+(4)^2=(x-4)^2$
donc $3x^2-24x+48=3(x^2-8x+16)=3(x-4)^2$
donc une forme canonique de $3x^2-24x+48$ est :

$$\boxed{3(x-4)^2}$$

AN202 Savoir résoudre une équation du second degré à une inconnue.

1. Résoudre dans ℝ l'équation : $5x^2+3=0$

On est dans le cas où $b=0$ et $c>0$.
l'équation $5x^2+3=0$ n'a pas de solution dans ℝ donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\emptyset}$

2. Résoudre dans ℝ l'équation : $5x^2-3=0$

On est dans le cas où $b=0$ et $c<0$.
$5x^2-3=(\sqrt{5}x)^2-(\sqrt{3})^2=(\sqrt{5}x+\sqrt{3})(\sqrt{5}x-\sqrt{3})$
donc
$5x^2-3=0$
$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{5}x+\sqrt{3})(\sqrt{5}x-\sqrt{3})=0$
$\Leftrightarrow \quad \sqrt{5}x+\sqrt{3}=0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{5}x-\sqrt{3}=0$
$\Leftrightarrow \quad x=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \quad \text{ou} \quad x=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$
$\Leftrightarrow \quad x=-\dfrac{\sqrt{15}}{5} \quad \text{ou} \quad x=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\left\{-\dfrac{\sqrt{15}}{5};\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right\}}$

3. Résoudre dans ℝ l'équation : $6x^2-8x=0$

On est dans le cas où $c=0$.
Il faut donc factoriser à l'aide d'un facteur commun.

$6x^2-8x=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(3x-4)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x=0 \quad \text{ou} \quad 3x-4=0$
donc

$6x^2-8x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \quad \text{ou} \quad x=\dfrac{4}{3}$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\left\{0;\dfrac{4}{3}\right\}}$

4. Résoudre dans ℝ l'équation : $x^2+x-6=0$

On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme x^2+x-6 n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(1)(-6)=1+24=25=5^2$$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+5}{2}=2 \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-5}{2}=-3$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\{-3;2\}}$

5. Résoudre dans ℝ l'équation : $4x^2-24x+36=0$

On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
de plus $4x^2-24x+36=4(x^2-6x+9)$ et x^2+6x+9 est une identité remarquable
car : $x^2+6x+9=(x)^2+2(x)(3)+(3)^2=(x+3)^2$
donc

$$4x^2-24x+36=0 \Leftrightarrow 4(x+3)^2=0 \Leftrightarrow x=-3$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\{-3\}}$

6. Résoudre dans ℝ l'équation : $x^2+2x+4=0$

On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme x^2+2x+4 n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4(1)(4)=4-16=12$$

$\Delta<0$ donc l'équation n'admet aucune solution dans ℝ, donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\emptyset}$

7. Résoudre dans ℝ l'équation : $4x^2+8x+3=0$

On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme $4x^2+8x+3$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=(8)^2-4(4)(3)=64-48=16=4^2$$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-8+4}{8}=\frac{-1}{2} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-8-4}{8}=-\frac{3}{2}$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\left\{\frac{-3}{2};-\frac{1}{2}\right\}}$

8. Résoudre dans ℝ l'équation : $x^2+9x+7=0$

On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme x^2+9x+7 n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$\Delta=b^2-4ac=(9)^2-4(1)(7)=81-28=53=(\sqrt{53})^2$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-9+\sqrt{53}}{2}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-9-\sqrt{53}}{2}$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\left\{\frac{-9-\sqrt{53}}{2};\frac{-9+\sqrt{53}}{2}\right\}}$

AN203 Savoir résoudre une équation se ramenant au second degré.

1. Résoudre dans ℝ l'équation : $(x+3)(x-5)=(2x-5)(x+2)$

C'est une équation du second degré.
Il n'y a pas de facteur commun pour factoriser donc on développe les deux membres et on fait apparaître les x dans le même membre.

$(x+3)(x-5)=(2x-5)(x+2)$

$\Leftrightarrow\ x^2-2x-15=2x^2+4x-5x-10$

$\Leftrightarrow\ x^2-2x-15=2x^2-x-10$

$\Leftrightarrow\ x^2+x+5=0$

On obtient une équation du second degré équivalente avec a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0.

Comme x^2+x+5 n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(1)(5)=1-20=-19$

$\Delta<0$ donc cette équation n'admet pas de solution dans ℝ donc l'ensemble des solutions est $S=\emptyset$ **.**

2. Résoudre dans ℝ l'équation : $x^2-4\sqrt{2}x+6=0$

On a une équation du second degré avec a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0

Comme $x^2-4\sqrt{2}x+6$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$\Delta=b^2-4ac=(-4\sqrt{2})^2-4(6)(1)=32-24=8=(2\sqrt{2})^2$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\{\sqrt{2};3\sqrt{2}\}}$

3. Résoudre dans IR l'équation : $\dfrac{8x-11}{x-3}=x-3$

Tout d'abord, il y a une valeur interdite car l'équation existe si et seulement si $x-3\neq 0$ donc si et seulement si x ≠ 3.
L'ensemble d'étude est donc E=IR \ {3}

Transformons cette équation en équations équivalentes plus simples :

$$\frac{8x-11}{x-3}=x-3 \Leftrightarrow \frac{8x-11}{x-3}=\frac{(x-3)^2}{x-3} \Leftrightarrow 8x-11=(x-3)^2 \Leftrightarrow 8x-11=x^2-6x+9$$
$$\Leftrightarrow x^2-14x+20=0$$

Ensuite, on obtient une équation du second degré équivalente avec a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0

Comme $x^2-14x+20$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant

$$\Delta=b^2-4ac=(14)^2-4(1)(20)=116=(2\sqrt{29})^2$$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{14+2\sqrt{29}}{2}=7+\sqrt{29} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{14-2\sqrt{29}}{2}=7-\sqrt{29}$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\{7-\sqrt{29};7-\sqrt{29}\}}$

4. Résoudre dans IR l'équation : $x^2+5.10^{14}x-5.10^{29}=0$

On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme $x^2+5.10^{14}x-5.10^{29}$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=(5.10^{14})^2-4(1)(-5.10^{29})=25.10^{28}+20.10^{29}=25.10^{28}+200.10^{28}$$

donc $\Delta=225.10^{28}=2{,}25.10^{30}=(1{,}5.10^{15})^2=(15.10^{14})^2$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5.10^{14}+15.10^{14}}{2}=\frac{10.10^{14}}{2}=\frac{10^{15}}{2}$$

et

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5.10^{14}-15.10^{14}}{2}=\frac{-20.10^{14}}{2}=-10.10^{14}=-10^{15}$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\left\{-10^{15};\frac{10^{15}}{2}\right\}}$

5. Résoudre dans IR l'équation : $\dfrac{2x-1}{x+3}=\dfrac{4x-5}{x-1}$

Tout d'abord, il y a une valeur interdite car l'équation existe si et seulement si $x+3\neq 0$ et $x-1\neq 0$ donc si et seulement si x ≠ -3 et x ≠ 1.

L'ensemble d'étude est donc E=ℝ \ {3 ; 1}

Transformons cette équation en équations équivalentes plus simples :

$$\frac{2x-1}{x+3}=\frac{4x-5}{x-1}$$

$\Leftrightarrow\ (2x-1)(x-1)=(4x-5)(x+3)\ \Leftrightarrow\ 2x^2-2x-x+1=4x^2+12x-5x-15$
$\Leftrightarrow\ 2x^2-3x+1=4x^2+7x-15\ \Leftrightarrow\ 2x^2+10x-16=0\ \Leftrightarrow\ 2(x^2+5x-8)=0$
$\Leftrightarrow\ x^2+5x-8=0$

On obtient une équation du second degré équivalente avec a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0.
Comme x^2+5x-8 n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=(5)^2-4(1)(-8)=25+32=32$$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{57}}{2}\ \text{ et }\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{57}}{2}$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\left\{\frac{-5-\sqrt{57}}{2};\frac{-5+\sqrt{57}}{2}\right\}}$

AN204 Savoir résoudre une équation bicarrée par changement de variable.

1. Résoudre dans ℝ l'équation : $x^4-9x^2+20=0$

On pose $X=x^2$ et on obtient l'équation $X^2-9X+20=0$ qui est une équation du second degré.
On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme $X^2-9X+20$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=(-9)^2-4(1)(20)=81-80=1=1^2$$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{9+1}{2}=5\ \text{ et }\ X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{9-1}{2}=4$$

Or on a posé $X=x^2$ donc il faut trouver x_1 et x_2 tels que $X_1=x_1^2$ et $X_2=x_2^2$.

Il faut donc résoudre les équations :

$$\begin{cases}x_1^2=5\\x_2^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\sqrt{5}\\x_2=2\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}x_1=-\sqrt{5}\\x_2=-2\end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\{-\sqrt{5};-2;2;\sqrt{5}\}}$

2. Résoudre dans ℝ l'équation : $x^4-1=0$

On pose $X=x^2$ et on obtient l'équation $X^2-1=0$ qui est une équation du second

degré.
On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0.
Or X^2-1 est une identité remarquable et on a
$X^2-1=0 \Leftrightarrow (X+1)(X-1)=0 \Leftrightarrow X_1=-1$ ou $X_2=1$
Or on a posé $X=x^2$ donc il faut trouver x_1 et x_2 tels que $X_1=x_1^2$ et $X_2=x_2^2$.
Il faut donc résoudre les équations : $\begin{cases} x_1^2=-1 \\ x_2^2=1 \end{cases}$

La première équation n'a pas de solution car dans ℝ un carré n'est jamais négatif.

$x_2^2=1 \Leftrightarrow x_2=1$ ou $x_2=-1$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\{-1\,;1\}}$

3. Résoudre dans ℝ l'équation : $x^4+3x^2-4=0$

On pose X=x^2 et on obtient l'équation X^2+3X-4=0 qui est une équation du second degré.
On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0.
Comme X^2+3X-4 n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=(3)^2-4(1)(-4)=9+16=25=5^2$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+5}{2}=1$ et $X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-5}{2}=-4$

Or on a posé $X=x^2$ donc il faut trouver x_1 et x_2 tels que $X_1=x_1^2$ et $X_2=x_2^2$.

Il faut donc résoudre les équations : $\begin{cases} x_1^2=1 \\ x_2^2=-4 \end{cases}$

La deuxième équation n'a pas de solution car dans ℝ un carré n'est jamais négatif.

$x_1^2=1 \Leftrightarrow x_1=1$ ou $x_1=-1$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\{-1\,;1\}}$

4. Résoudre dans ℝ l'équation : $16x^4-24x^2+5=0$

On pose $X=x^2$ et on obtient l'équation $16X^2-24X+5=0$ qui est une équation du second degré.
On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme $16X^2-24X+5$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$\Delta=b^2-4ac=(-24)^2-4(16)(5)=576-320=256=16^2$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{24+16}{32}=\frac{40}{32}=\frac{5}{4} \text{ et } X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{24-16}{32}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$$

Or on a posé $X=x^2$ donc il faut trouver x_1 et x_2 tels que $X_1=x_1^2$ et $X_2=x_2^2$.

Il faut donc résoudre les équations :

$$\begin{cases} x_1^2=\frac{5}{4} \\ x_2^2=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{\sqrt{5}}{2} \\ x_2=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x_1=-\frac{\sqrt{5}}{2} \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\left\{-\frac{\sqrt{5}}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}}$

5. Résoudre dans ℝ l'équation : $x^4-2{,}26x^2+0{,}0225=0$

On pose $X=x^2$ et on obtient l'équation $X^2-2{,}26X+0{,}0225=0$ qui est une équation du second degré.
On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme $X^2-2{,}26X+0{,}0225$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=(-2{,}26)^2-4(1)(0{,}0225)=5{,}1076-0{,}09=5{,}0176=2{,}24^2$$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2{,}26+2{,}24}{2}=\frac{2{,}24}{2}=2{,}25 \text{ et } X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2{,}26-2{,}24}{2}=\frac{0{,}02}{2}=0{,}01$$

Or on a posé $X=x^2$ donc il faut trouver x_1 et x_2 tels que $X_1=x_1^2$ et $X_2=x_2^2$.

Il faut donc résoudre les équations :

$$\begin{cases} x_1^2=2{,}25 \\ x_2^2=0{,}01 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1{,}5 \\ x_2=0{,}1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x_1=-1{,}5 \\ x_2=-0{,}1 \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\{-1{,}5; -0{,}1; 0{,}1; 1{,}5\}}$

6. Résoudre dans ℝ l'équation : $x^4+3x^2+2=0$

On pose $X=x^2$ et on obtient l'équation $X^4+3X^2+2=0$ qui est une équation du second degré.
On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme X^4+3X^2+2 n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=(3)^2-4(1)(2)=9-8=1=1^2$$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+1}{2}=-1 \text{ et } X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-1}{2}=-2$$

Or on a posé $X=x^2$ donc il faut trouver x_1 et x_2 tels que $X_1=x_1^2$ et $X_2=x_2^2$.

Il faut donc résoudre les équations : $\begin{cases} x_1^2=-1 \\ x_2^2=-2 \end{cases}$

Les deux équations n'ont pas de solution dans ℝ car un carré dans ℝ n'est jamais négatif

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\emptyset}$

7. Résoudre dans ℝ l'équation : $x^4-14x^2+49=0$

On pose $X=x^2$ et on obtient l'équation $X^2-14X+49=0$ qui est une équation du second degré.
On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0.
Comme $X^2-14X+49$ est une identité remarquable, on factorise l'expression :

$$X^2-14X+49=0 \Leftrightarrow (X)^2-2(X)(7)+(7)^2=0 \Leftrightarrow (X-7)^2=0 \Leftrightarrow X=7$$

Or on a posé $X=x^2$ donc il faut trouver x tel que $X=x^2$
Il faut donc résoudre l'équation $x^2=7 \Leftrightarrow x=\sqrt{7}$ ou $x=-\sqrt{7}$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\{-\sqrt{7};\sqrt{7}\}}$

AN205 Savoir résoudre une équation par changement de variable .

1. Résoudre dans ℝ* l'équation : $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-5=0$

On pose $X=\frac{1}{x}$ et on obtient l'équation $X^2+4X-5=0$ qui est une équation du second degré.
On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme X^2+4X-5 n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4(1)(-5)=16+20=36=6^2$$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+6}{2}=1 \text{ et } X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-6}{2}=-5$$

Or on a posé $X=\frac{1}{x}$ donc il faut trouver x_1 et x_2 tels que $X_1=\frac{1}{x_1}$ et $X_2=\frac{1}{x_1}$.

Il faut donc résoudre les équations :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1}=1 \\ \dfrac{1}{x_2}=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\left\{-\frac{1}{5};1\right\}}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation : $\frac{1}{x^2}=9$

On pose $X=\frac{1}{x}$ et on obtient l'équation $X^2-9=0$ qui est une équation du second degré.
On est dans le cas où a ≠ 0, b = 0 et c ≠ 0

X^2-9 est une identité remarquable, et on obtient en factorisant :

$X^2-9=0 \Leftrightarrow (X-3)(X+3)=0 \Leftrightarrow X=3$ ou $X=-3$

On trouve donc deux solutions $X_1=3$ et $X_2=-3$

Or on a posé $X=\frac{1}{x}$ donc il faut trouver x_1 et x_2 tels que $X_1=\frac{1}{x_1}$ et $X_2=\frac{1}{x_1}$.

Il faut donc résoudre les équations :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1}=3 \\ \dfrac{1}{x_2}=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1}{3} \\ x_2=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right\}}$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation : $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{4}=0$

On pose $X=\frac{1}{x}$ et on obtient l'équation $X^2-X-\frac{1}{4}=0$ qui est une équation du second degré.
On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0

$X^2-X-\frac{1}{4}$ est une identité remarquable, et on obtient en factorisant :

$$X^2-X-\frac{1}{4}=(X)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)(X)+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(X-\frac{1}{2}\right)^2$$

donc

$$X^2-X-\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow \left(X-\frac{1}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow X=\frac{1}{2}$$

Or on a posé $X=\frac{1}{x}$ donc il faut trouver x tel que $X=\frac{1}{x}$.

Il faut donc résoudre les équations : $\frac{1}{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=2$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\{2\}}$

4. Résoudre dans ℝ l'équation : $2\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$

On utilise pour cette partie, un résultat du cours sur les angles orientés :

$$\cos x=\cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+2k\pi \\ x=-a+2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

On pose $X=\cos\theta$ et on obtient l'équation $2X^2-X-1=0$ qui est une équation du second degré.
On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme $2X^2-X-1$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(2)(-1)=1+8=9=3^2$$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+3}{4}=1 \text{ et } X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}$$

Or on a posé $X=\cos\theta$ donc il faut trouver θ_1 et θ_2 tels que $X_1=\cos\theta_1$ et $X_2=\cos\theta_2$.

Il faut donc résoudre les équations :

$$\Rightarrow \cos\theta_1=1 \Leftrightarrow \cos\theta_1=\cos 0 \Leftrightarrow \theta_1=0+2k\pi \ , \ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_2=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\theta_2=\cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_2=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \\ \theta_2=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{cases} , \ k\in\mathbb{Z}$$

donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{S=\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,;2k\pi\,;\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right\}} \text{ avec } k\in\mathbb{Z}$$

5. Résoudre dans ℝ l'équation : $4\cos^2\theta-2(1+\sqrt{3})\cos\theta+\sqrt{3}=0$

On pose $X=\cos\theta$ et on obtient l'équation $4X^2-2(1+\sqrt{3})X+\sqrt{3}=0$ qui est une équation du second degré.

On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme $4X^2-2(1+\sqrt{3})X+\sqrt{3}$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=[2(1+\sqrt{3})]^2-4(4)(\sqrt{3})=4(1+\sqrt{3})^2-16\sqrt{3}$$

donc $\Delta=4+8\sqrt{3}+12+16\sqrt{3}=4-8\sqrt{3}+12$

or $4-8\sqrt{3}+12$ est une identité remarquable car

$$4-8\sqrt{3}+12=(2)^2-2(2\sqrt{3})(2)+(2\sqrt{3})^2=(2-2\sqrt{3})^2$$

donc $\Delta=(2-2\sqrt{3})^2$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2(1+\sqrt{3})+2(1-\sqrt{3})}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

et

$$X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2(1+\sqrt{3})-2(1-\sqrt{3})}{8}=\frac{4\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Or on a posé $X=\cos\theta$ donc il faut trouver θ_1 et θ_2 tels que $X_1=\cos\theta_1$ et $X_2=\cos\theta_2$.

Il faut donc résoudre les équations :

$$\Rightarrow \cos\theta_1=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\theta_1=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases}\theta_1=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \theta_1=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\theta_2=\cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases}\theta_2=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ \theta_2=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$$

donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{S=\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi\,;-\frac{\pi}{6}+2k\pi\,;\frac{\pi}{6}+2k\pi\,;\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}} \text{ avec } k\in\mathbb{Z}$$

6. Résoudre dans ℝ l'équation : $\sin^2\theta-\frac{1}{4}=0$

On utilise pour cette partie, un résultat du cours sur les angles orientés :

$$\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

On pose $X = \sin\theta$ et on obtient l'équation $X^2 - \frac{1}{4} = 0$ qui est une équation du second degré.
On est dans le cas où a ≠ 0, b = 0 et c ≠ 0
Comme $2X^2 - X - 1$ est une identité remarquable, peut factoriser :

$$X^2 - \frac{1}{4} = \left(X + \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{1}{2}\right) \text{ donc}$$

$$X^2 - \frac{1}{4} \iff X_1 = \frac{1}{2} \text{ ou } X_2 = -\frac{1}{2}$$

Or on a posé $X = \sin\theta$ donc il faut trouver θ_1 et θ_2 tels que $X_1 = \sin\theta_1$ et $X_2 = \sin\theta_2$.

Il faut donc résoudre les équations :

$$\Rightarrow \sin\theta_1 = \frac{1}{2} \iff \cos\theta_1 = \sin\frac{\pi}{6} \iff \begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \theta_1 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \theta_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \sin\theta_2 = -\frac{1}{2} \iff \sin\theta_2 = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \iff \begin{cases} \theta_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \theta_2 = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, \begin{cases} \theta_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \theta_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{7\pi}{3} + 2k\pi \right\}} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

7. Résoudre dans ℝ l'équation : $2\sin^2\theta + (2 - \sqrt{3})\sin\theta - \sqrt{3} = 0$

On pose $X = \sin\theta$ et on obtient l'équation $2X^2 + (2 - \sqrt{3})X - \sqrt{3} = 0$ qui est une équation du second degré.
On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme $2X^2 + (2 - \sqrt{3})X - \sqrt{3}$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2 - \sqrt{3})^2 - 4(2)(-\sqrt{3}) = 4 - 4\sqrt{3} + 3 + 8\sqrt{3}$$

donc $\Delta = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = (2)^2 + 2(2)(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 = (2 + \sqrt{3})^2$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

Or on a posé $X = \sin\theta$ donc il faut trouver θ_1 et θ_2 tels que $X_1 = \sin\theta_1$ et $X_2 = \sin\theta_2$.

Il faut donc résoudre les équations :

$$\Rightarrow \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\theta_1 = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \theta_1 = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \theta_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_2 = -1 \Leftrightarrow \cos\theta_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \theta_2 = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, \begin{cases} \theta_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \theta_2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\text{k}\pi\,; -\frac{\pi}{2} + 2\text{k}\pi\,; \frac{2\pi}{3} + 2\text{k}\pi\,; \frac{3\pi}{2} + 2\text{k}\pi \right\}}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$

8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin^2\theta - \sin\theta = 0$

On pose $X = \sin\theta$ et on obtient l'équation $X^2 - X = 0$ qui est une équation du second degré.

On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c = 0

On peut factoriser par X : $X^2 - X = 0 \Leftrightarrow X(X-1) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ ou $X = 1$

On obtient donc deux solutions réelles $X_1 = 0$ et $X_2 = 1$

Or on a posé $X = \sin\theta$ donc il faut trouver θ_1 et θ_2 tels que $X_1 = \sin\theta_1$ et $X_2 = \sin\theta_2$.

Il faut donc résoudre les équations :

$$\Rightarrow \sin\theta_1 = 0 \Leftrightarrow \cos\theta_1 = \cos 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = 0 + 2k\pi \\ \theta_1 = \pi - 0 + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = 2k\pi \\ \theta_1 = \pi + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow \cos\theta_2=1 \Leftrightarrow \cos\theta_2=\cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}\theta_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \theta_2=\pi-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \theta_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{S=\left\{2\mathrm{k}\pi\,;\frac{\pi}{2}+2\mathrm{k}\pi\,;\pi+2\mathrm{k}\pi\right\}}\text{ avec } k\in\mathbb{Z}$$

9. Résoudre dans ℝ l'équation : $t-\sqrt{t}-12=0$

On pose $X=\sqrt{t}$ avec $t\geqslant 0$ et on obtient l'équation $X^2+X-12=0$ qui est une équation du second degré.
On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme X^2+X-12 n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(1)(-12)=1+48=49=7^2$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+7}{2}=\frac{6}{2}=3$ et $X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-7}{2}=-\frac{8}{2}=-4$
Or on a posé $X=\sqrt{t}$ donc il faut trouver t_1 et t_2 tels que $X_1=\sqrt{t_1}$ et $X_2=\sqrt{t_2}$
et il faut donc résoudre :

$\Rightarrow \sqrt{t_1}=3 \Leftrightarrow (\sqrt{t_1})^2=9 \Leftrightarrow t_1=9$
$\Rightarrow \sqrt{t_1}=-4$ or dans ℝ une racine carrée n'est jamais négative, donc cette équation n'a pas de solution.
donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\{9\}}$

10. Résoudre dans ℝ l'équation : $t+10\sqrt{t}+25=0$

On pose $X=\sqrt{t}$ avec $t\geqslant 0$ et on obtient l'équation $X^2+10\mathrm{X}+25=0$ qui est une équation du second degré.
On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme $X^2+10\mathrm{X}+25$ est une identité remarquable, on peut factoriser facilement :
$X^2+10X+25=(X)^2+2(5)(X)+(5)^2=(X+5)^2$
donc $X^2+10X+25=0 \Leftrightarrow (X+5)^2=0 \Leftrightarrow X=-5$
On trouve donc une seule solution $X_1=-5$ or on a posé $X_1=\sqrt{t_1}$, il faut donc résoudre maintenant l'équation : $\sqrt{t_1}=-5$. Dans ℝ une racine carrée n'est jamais négative, donc cette équation n'a pas de solution.
L'ensemble des solutions est donc $\boxed{S=\emptyset}$.

11. Résoudre dans ℝ l'équation : $t+2\sqrt{t}+7=0$

On pose $X=\sqrt{t}$ avec $t \geqslant 0$ et on obtient l'équation $X^2+2X+7=0$ qui est une équation du second degré.
On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme X^2+2X+7 n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4(1)(7)=4-28=-24$
donc $\Delta<0$ et l'équation n'admet pas de solution dans r
donc l'ensemble des solution est $\boxed{S=\emptyset}$.

AN206 Savoir résoudre un système se ramenant au second degré.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-35 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ xy=-35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ (2-y)y=-35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ 2y-y^2=-35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ y^2-2y-35=0 \end{cases}$$

Il faut donc résoudre l'équation du second degré $y^2-2y-35=0$ pour trouver les valeurs possibles de y.
On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme $y^2-2y-35$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(-35)=4+140=144=12^2$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+12}{2}=7 \text{ et } X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-12}{2}=-5$$

or on a posé $x_1=2-y_1$ et $x_2=2-y_2$ et on trouve donc :
Si $y_1=7$ alors $x_1=2-7=-5$ et si $y_2=-5$ alors $x_2=2-(-5)=7$
et inversement puisqu'on peut permuter *x* et *y* sans changer le système donc l'ensemble des couples solutions est :

$$\boxed{S=\{(-5;7);(7;-5)\}}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} x+y=-\frac{5}{2} \\ xy=-\frac{3}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y=-\frac{5}{2} \\ xy=-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{5}{2}-y \\ xy=-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{5}{2}-y \\ \left(-\frac{5}{2}-y\right)y=-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{5}{2}-y \\ -\frac{5}{2}y-y^2=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

donc $\begin{cases} x+y=-\frac{5}{2} \\ xy=-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{5}{2}-y \\ y^2+\frac{5}{2}y-\frac{3}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{5}{2}-y \\ 2y^2+5y-3=0 \end{cases}$

Il faut donc résoudre l'équation du second degré $2y^2+5y-3=0$ pour trouver les valeurs possibles de y.
On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme $2y^2+5y-3$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$\Delta=b^2-4ac=(5)^2-4(2)(-3)=25+24=49=7^2$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+7}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ et $X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-7}{4}=-\frac{12}{4}=-3$

or on a posé $x_1=-\frac{5}{2}-y_1$ et $x_2=-\frac{5}{2}-y_2$ et on trouve donc :

Si $y_1=\frac{1}{2}$ alors $x_1=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{6}{2}=-3$ et si $y_2=-3$ alors $x_2=-\frac{5}{2}+3=\frac{1}{2}$

et inversement puisqu'on peut permuter *x* et *y* sans changer le système donc l'ensemble des couples solutions est :

$$\boxed{S=\left\{\left(-3;\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};-3\right)\right\}}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ (1-y)y=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ y-y^2=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ y^2-y+\frac{1}{4}=0 \end{cases}$$

donc $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 4y^2-4y+1=0 \end{cases}$

Il faut donc résoudre l'équation du second degré $4y^2-4y+1=0$ pour trouver les valeurs possibles de *y*. On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0.
Comme $4y^2-4y+1$ est une identité remarquable, on peut factoriser facilement :

$4y^2-4y+1=(2y)^2-2(2y)(1)+(1)^2=(2y-1)^2$

donc

$4y^2-4y+1=0 \Leftrightarrow (2y-1)^2=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$

Il y a donc une seule solution $y_1=\frac{1}{2}$ or on a posé $x_1=1-y_1$ donc on obtient

$x_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

et inversement, puisqu'on peut permuter x et y sans changer le système.

L'ensemble des couples solutions est donc $\boxed{S=\left\{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\right\}}$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases}\cos\theta_1+\cos\theta_2=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\\ \cos\theta_1\times\cos\theta_2=-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}$

On pose $x=\cos\theta_1$ et $y=\cos\theta_2$ et on obtient le système : $\begin{cases}x+y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\\ xy=-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}$

$$\begin{cases}x+y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\\ xy=-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-y\\ xy=-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-y\\ \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}-y\right)y=-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}$$

donc on a

$$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-y\\ \frac{\sqrt{3}-1}{2}y-y^2=-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-y\\ y^2-\frac{\sqrt{3}-1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-y\\ 4y^2-2(\sqrt{3}-1)y-\sqrt{3}=0\end{cases}$$

Il faut donc résoudre l'équation du second degré $4y^2-2(\sqrt{3}-1)y-\sqrt{3}=0$
pour trouver les valeurs possibles de y.
On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme $4y^2-2(\sqrt{3}-1)y-\sqrt{3}$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$\Delta=b^2-4ac=[-2(\sqrt{3}-1)]^2-4(4)(-\sqrt{3})=4(\sqrt{3}-1)^2+16\sqrt{3}$ donc $\Delta=(2\sqrt{3}+2)^2$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$y_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2(\sqrt{3}-1)+(2\sqrt{3}+2)}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$y_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2(\sqrt{3}-1)-(2\sqrt{3}+2)}{8}=-\frac{1}{2}$$

or on a posé $x_1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-y_1$ et $x_2=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-y_2$ donc

si $y_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ alors $x_1=-\frac{1}{2}$ et si $y_2=-\frac{1}{2}$ alors $x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Il faut maintenant trouver $\theta_{¿}1$ et θ_2 :

On a posé $x_1=\cos\theta_1$ et $y_1=\cos\theta_2$ donc il faut résoudre :

$$\Rightarrow \cos\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\theta_1=\cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases}\theta_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ \theta_1=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{cases}, \ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_2=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\theta_2=\cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases}\theta_2=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \\ \theta_2=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{cases}, \ k\in\mathbb{Z}$$

et inversement, puisqu'on peut permuter θ_1 et θ_2 sans changer le système.

Si $k\in\mathbb{Z}$ alors l'ensemble des solutions est

$$\begin{aligned} S=&\left\{\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi ; \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right) ; \left(\frac{\pi}{6}+2k\pi ; -\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\right\} \\ \cup &\left\{\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi ; \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right) ; \left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi ; -\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\right\} \\ \cup &\left\{\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi ; \frac{\pi}{6}+2k\pi\right) ; \left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi ; -\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right\} \\ \cup &\left\{\left(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi ; \frac{\pi}{6}+2k\pi\right) ; \left(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi ; -\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right\}\end{aligned}$$

5.Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases}AB^2+BC^2=50 \\ AB\times BC=14\end{cases}$

On pose $x=AB$ et $y=BC$ avec $x\geqslant 0$ et $y\geqslant 0$ puisque AB et BC sont des distances. Le système est donc équivalent à $\begin{cases}x^2+y^2=50 \\ xy=14\end{cases}$

$$\begin{cases}x^2+y^2=50 \\ xy=14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=50-y^2 \\ x^2y^2=196\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=50-y^2 \\ (50-y^2)y^2=196\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2=50-y^2 \\ 50y^2-y^4=196\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=50-y^2 \\ y^4-50y^2+196=0\end{cases}$$

Il faut donc résoudre l'équation bicarrée $y^4-50y^2+196=0$ pour trouver les valeurs possibles de y.

On pose $Y=y^2$ et on obtient l'équation $Y^2-50Y+196=0$ qui est une équation du second degré.

On est dans le cas où a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0.

Comme $Y^2-50Y+196$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :

$\Delta=b^2-4ac=(-50)^2-4(1)(196)=1716=(2\sqrt{429})^2$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$Y_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{50+2\sqrt{429}}{2}=25+\sqrt{429}$
et
$Y_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{50-2\sqrt{429}}{2}=25-\sqrt{429}$
or on a posé $Y_1=y_1^2$ et $Y_2=y_2^2$ donc il faut résoudre maintenant les équations suivantes :

Calcul des y_1 et y_2 :
$\Rightarrow$ $y_1^2=25+\sqrt{429}$ $\Leftrightarrow$ $y_1=\sqrt{25+\sqrt{429}}$ ou $y_1=-\sqrt{25+\sqrt{429}}$
or $y_1\geqslant 0$ donc on a seulement $y_1=\sqrt{25+\sqrt{429}}$

$\Rightarrow$ $y_2^2=25-\sqrt{429}$ $\Leftrightarrow$ $y_2=\sqrt{25-\sqrt{429}}$ ou $y_2=-\sqrt{25-\sqrt{429}}$
or $y_2\geqslant 0$ donc on a seulement $y_2=\sqrt{25-\sqrt{429}}$

Calcul des x_1 et x_2 :
On a posé x^2_1=50-y^2_1 et x^2_2=50-y^2_2 et donc on a :

$\Rightarrow$ Si $y_1=\sqrt{25+\sqrt{429}}$ alors $x_1^2=50-(25+\sqrt{429})=25-\sqrt{429}$
donc $x_1=\sqrt{25-\sqrt{429}}$ car $x_1\geqslant 0$

$\Rightarrow$ Si $y_2=\sqrt{25-\sqrt{429}}$ alors $x_2^2=50-(25-\sqrt{429})=25+\sqrt{429}$
donc $x_2=\sqrt{25+\sqrt{429}}$ car $x_2\geqslant 0$
et inversement puisqu'on peut permuter x et y sans changer le système, donc l'ensemble des couples solutions est :

$$\boxed{S=\left\{\left(\sqrt{25-\sqrt{429}}\,;\sqrt{25+\sqrt{429}}\right);\left(\sqrt{25+\sqrt{429}}\,;\sqrt{25-\sqrt{429}}\right)\right\}}$$

AN207 Savoir factoriser un trinôme du second degré.

1. Factoriser $A=-3x^2-6x+24$

$-3x^2-6x+24$ est un trinôme du second degré avec $a\neq 0$, $b\neq 0$ et $c\neq 0$.
Comme $-3x^2-6x+24$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4(-3)(24)=36+288=324=18^2$
$\Delta>0$ donc le trinôme admet deux racines réelles :
$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6+18}{-6}=4$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6-18}{-6}=2$
on a donc d'après le cours : $\boxed{A=-3(x-2)(x+4)}$

2. Factoriser $B=3x^2-4$

$3x^2-4$ est un trinôme du second degré avec a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme $3x^2-4$ est une identité remarquable, on peut factoriser facilement :
$B=3x^2-4=(\sqrt{3}x)^2-(2)^2=(\sqrt{3}x+2)(\sqrt{3}x-2)$
On a donc $\boxed{B=(\sqrt{3}x+2)(\sqrt{3}x-2)}$

3. Factoriser $C=2x^2+34x+132$

$2x^2+34x+132$ est un trinôme du second degré avec a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme $2x^2+34x+132$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=(34)^2-4(2)(2)(132)=1156-1056=100=10^2$
$\Delta>0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :
$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-34+10}{4}=-6$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-34-10}{4}=-11$
On a donc $\boxed{C=2(x+6)(x+11)}$

4. Factoriser $D=-x^2+\sqrt{3}x+18$

$-x^2+\sqrt{3}x+18$ est un trinôme du second degré avec a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme $-x^2+\sqrt{3}x+18$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=(\sqrt{3})^2-4(-1)(18)=3+72=(5\sqrt{3})^2$
$\Delta>0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :
$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{-2}=-2\sqrt{3}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-\sqrt{3}-5\sqrt{3}}{-2}=3\sqrt{3}$
On a donc $\boxed{D=-(x+2\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})}$

5. Factoriser $E=-20x^2+10x$

$-20x^2+10x$ est un trinôme du second degré avec a ≠ 0, b ≠ 0 et c=0
On peut donc factoriser ce trinôme par x et même par $10x$ dans cet exercice :
$-20x^2+10x=10x(-2x^2+1)=10x(1-2x^2)=10x(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)$
On a donc $\boxed{E=10x(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)}$

AN208 Savoir résoudre une inéquation du second degré.

1. Résoudre dans ℝ l'inéquation $x^2-2x-15\leqslant 0$

$A(x)=x^2-2x-15$ est un trinôme du second degré avec a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme $x^2-2x-15$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant
$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(-15)=4+60=64=8^2$
$\Delta>0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :
$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2+8}{2}=5$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2-8}{2}=-3$

On peut donc dresser le tableau des signes du trinôme :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=[-3\,;5]}$

2. Résoudre dans ℝ l'inéquation $4x^2-28x+49>0$

$B(x)=4x^2-28x+49$ est un trinôme du second degré avec a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
comme $4x^2-28x+49$ est une identité remarquable, on peut donc factoriser facilement :
$B(x)=4x^2-28x+49=(2x)^2-2(2x)(7)+(7)^2=(2x-7)^2$
or, dans ℝ, un carré est toujours positif ou nul, donc
l'ensemble des solutions est $S=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{7}{2}\right\}$

3. Résoudre dans ℝ l'inéquation $3x^2+5<0$

$C(x)=3x^2+5$ est un trinôme du second degré avec a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
$3x^2+5$ est toujours strictement positif car x^2 est est toujours positif dans ℝ, donc il n'y a aucune valeur de x telle que $3x^2+5<0$ et
l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\emptyset}$.

4. Résoudre dans ℝ l'inéquation $x^2-0{,}03x-0{,}034>0$

$D(x)=x^2-0{,}03x-0{,}034$ est un trinôme du second degré avec a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
comme $x^2-0{,}03x-0{,}034$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=(-0{,}03)^2-4(1)(-0{,}034)=0{,}0009+1{,}36$
donc $\Delta=0{,}1369=(0{,}37)^2$
$\Delta>0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :
$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{0{,}03+0{,}37}{2}=0{,}2$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{0{,}03-0{,}37}{2}=-0{,}17$
On peut donc dresser le tableau des signes, suivants :

x	$-\infty$		$-0{,}17$		$0{,}2$		$+\infty$
$D(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=]-\infty\,;-0{,}17[\,\cup\,]0{,}2\,;+\infty[}$

5. Résoudre dans ℝ l'inéquation $-x^2+2\pi x+3\pi^2>0$

$E(x)=-x^2+2\pi x+3\pi^2$ est un trinôme du second degré avec a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0.

Comme $-x^2+2\pi x+3\pi^2$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=(2\pi)^2-4(1)(3\pi^2)=4\pi^2+12\pi^2=16\pi^2=(4\pi)^2$
$\Delta>0$ donc le trinôme admet deux racines réelles :
$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2\pi+4\pi}{-2}=-3\pi$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2\pi-4\pi}{-2}=\pi$
On peut donc dresser le tableau des signes, suivants :

x	$-\infty$		-3π		π		$+\infty$
$D(x)$		+	0	–	0	+	

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=]-3\pi;\pi[}$

AN209 Savoir résoudre une inéquation plus complexe.

1. Résoudre dans ℝ l'inéquation : $\dfrac{4}{(x-2)^2}\geqslant 1$

L'inéquation existe si et seulement si $(x-2)^2\neq 0$ donc si $x\neq 2$ donc l'ensemble d'étude est E=ℝ \ {2}
Transformons l'inéquation :
$\dfrac{4}{(x-2)^2}\geqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{(x-2)^2}-1\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{(x-2)^2}-\dfrac{(x-2)^2}{(x-2)^2}\geqslant 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{4-(x-2)^2}{(x-2)^2}\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{[2+(x-2)][2-(x-2)]}{(x-2)^2}\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x+4)}{(x-2)^2}\geqslant 0$
Les valeurs qui annulent le numérateur sont x=0 et x=-4
Dressons le tableau des signes de $A(x)=\dfrac{x(x+4)}{(x-2)^2}$:

x	$-\infty$		-4		0		2		$+\infty$
x		-	|	-	0	+	|	+	
$(x+4)$		-	0	+	|	+	|	+	
$(x-2)^2$		+	|	+	|	+	0	+	
$A(x)$		+	0	–	0	+	||	+	

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=]-\infty;-4]\cup[0;2[\cup]2;+\infty[}$

2. Résoudre dans ℝ l'inéquation : $\dfrac{(x-3)(x^2+3x-4)}{x^2+5}<0$

L'inéquation existe si et seulement si $x^2+5\neq 0$. Or dans ℝ, x^2+5 est strictement positif et jamais nul, donc l'ensemble d'étude est E=ℝ.
Cherchons les valeurs qui annulent le numérateur :

• $x-3=0 \iff x=3$
et
• $x^2+3x-4=0$ est une équation du second degré avec a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme x^2+3x-4 n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=(3)^2-4(1)(-4)=9+16=25=5^2$
$\Delta>0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :
$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3+5}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3-5}{2}=-4$
On peut donc dresser le tableau des signes de $B(x)=\dfrac{(x-3)(x^2+3x-4)}{x^2+5}$

x	$-\infty$		-4		1		3		$+\infty$
$x-3$		-	|	-	|	-	0	+	
x^2+3x-4		+	0	-	0	+	|	+	
x^2+5		+	|	+	|	+	|	+	
$B(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=]-\infty;-4[\cup]1;3[}$

3. Résoudre dans ℝ l'inéquation : $\dfrac{x-2}{x+3}>\dfrac{x+1}{x+2}$

L'inéquation existe si et seulement si $x+3\neq 0$ et $x+2\neq 0$
$x+3\neq 0 \iff x\neq -3$ et $x+2\neq 0 \iff x\neq -2$
donc l'ensemble d'étude est E=ℝ \{-2;-2}
Transformons l'inéquation :
$\dfrac{x-2}{x+3}>\dfrac{x+1}{x+2} \iff \dfrac{x-2}{x+3}-\dfrac{x+1}{x+2}>0 \iff \dfrac{(x-2)(x+2)-(x+1)(x+3)}{(x+3)(x+2)}>0$
$\iff \dfrac{x^2-4-(x^2+4x+3)}{(x+3)(x+2)}>0 \iff \dfrac{-4x-7}{(x+3)(x+2)}>0$
Cherchons les valeur qui annulent le numérateur :
$-4x-7=0 \iff x=-\dfrac{7}{4}$
On peut donc dresser le tableau des signes de $C(x)=\dfrac{-4x-7}{(x+3)(x+2)}$

x	$-\infty$		-3		-2		-7/4		$+\infty$
$-4x-7$		+	|	+	|	+	0	+	
$(x+3)(x+2)$		+	0	-	0	+	|	+	
$C(x)$		+	||	-	||	+	0	+	

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=]-\infty;-4[\cup]1;3[}$

4. Résoudre dans ℝ l'inéquation : $\sqrt{x^2+21x+100} \leqslant 10$

L'équation existe si et seulement si $x^2+21x+100 \geqslant 0$
Il faut donc résoudre une inéquation du second degré pour trouver l'ensemble d'étude.
$D(x)=x^2+21x+100$ est un trinôme du second degré avec a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme $x^2+21x+100$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=(21)^2-4(1)(100)=441-400=41=(\sqrt{41})^2$
$\Delta>0$ donc le trinôme admet deux racines réelles :
$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-21+\sqrt{41}}{2}$ et $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-21+\sqrt{41}}{2}$
On peut donc dresser le tableau des signes :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$D(x)$		+	0	−	0	+	

Donc l'ensemble d'étude est : $E=\left]-\infty\,;\dfrac{-21-\sqrt{41}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-21+\sqrt{41}}{2}\,;+\infty\right]$
Il reste maintenant à résoudre l'équation de départ :
$\sqrt{x^2+21x+100}=10 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+21x+100^2}=10^2 \Leftrightarrow x^2+21x+100=100 \Leftrightarrow$
$x^2+21x=0 \Leftrightarrow x(x+21)=0$
$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-21$
Or -21 ∈ E et 0 ∈ E donc l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\{-21\,;0\}}$

AN210 Savoir trouver des racines évidentes d'un polynôme.

On utilise pour cette partie les règles suivantes qui ne sont pas dans le cours mais quoi sont très utiles pour aller plus vite :
Pour P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$
- ⇒ Si la somme de ses coefficients est nulle, alors $P(1)=0$
- ⇒ Si la somme de ses coefficients des termes d'exposant pair est égale à la somme de ses coefficients des termes d'exposant impair , alors $P(-1)=0$
- ⇒ Si il n'a pas de terme constant, alors $P(0)=0$

1. Trouver une racine évidente de $P(x)=x^4+3x^3-9x^2+6x-1$

On remarque que la somme des coefficients du polynôme est égale à 0 donc $P(1)$ dit être égal à 0.
Vérification :
$P(1)=(1)^4+3(1)^3-9(1)^2+6(1)-1=1+3-9+6-1=10-10$
donc $P(1)=0$ et 1 est une racine évidente de P .

2. Trouver une racine évidente de $P(x)=x^3+x^2-3x-3$

On remarque que la somme de ses coefficients des termes d'exposants pair est égale à la somme de ses coefficients des termes d'exposant impair, donc $P(-1)$ doit être égal à 0.
Vérification :
$P(-1)=(-1)^3+(-1)^2-3(-1)-3=-1+1+3-3=0$
donc $P(-1)=0$ et -1 est une racine évidente de P .

3. Trouver une racine évidente de $P(x)=x^4-8x^3+8x^2-x$

On remarque que la somme des coefficients du polynôme est égale à 0, donc P(1) doit être égal à 0.
Vérification :
$P(1)=(1)^4-8(1)^3+8(1)^2-(1)=1-8+8-1=0$ donc $P(1)=0$ et 1 est une racine évidente de P .
De plus on remarque qu'il n'a pas de terme constant donc $P(0)$ doit être égal à 0.
Vérification :
$P(0)=0^4-8(0)^3+8(0)^2-0=0$
donc $P(0)=0$ et 0 est une racine évidente de P .

4. Trouver une racine évidente de $P(x)=x^5-5x^3+4x$

On remarque que la somme des coefficients du polynôme est égale à 0, donc $P(1)$ doit être égal à 0.
Vérification :
$P(1)=(1)^5-5(1)^3+4(1)=1-5+4=0$ donc $P(1)=0$ et 1 est une racine évidente de P .
De plus on remarque qu'il n'a pas de terme constant, donc $P(0)$ doit être égal à 0.
Vérification :
$P(0)=(0)^5-5(0)^3+4(0)=0$ donc $P(0)=0$ et 0 est une racine évidente de P .
De plus on remarque que la somme de ses coefficients des termes d'exposant pair est égale à l somme de ses coefficients des termes d'exposant impair, donc P(-1) doit être égal à 0.
Vérification :
$P(-1)=(-1)^5-5(-1)^3+4(-1)=-1+5-4=0$ donc $P(-1)=0$ et -1 est une racine évidente de P .
On peut aussi par le calcul montrer que 2 et -2 sont des racines du polynômes en calculant $P(2)$ et $P(-2)$.

AN211 Savoir factoriser un polynôme de degré supérieur à 3.

1. Factoriser le polynôme $P(x)=x^3-13x+12$

On remarque que la somme des coefficients du polynôme est égal à 0, donc $P(1)$ doit être égal à 0.

Vérification :
$P(1)=(1)^3-13(1)+12=1-13+12=0$
donc $P(1)=0$ et 1 est une racine de P .
D'après le théorème de factorisation des polynômes, il existe un polynôme Q de degré 2 tel que $P(x)=(x-1)\times Q(x)$
donc il existe a ∈ IR, b ∈ IR, c ∈ IR tels que $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$
$P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c$
donc $P(x)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$
Par identification avec le polynôme P , on obtient :
$$\begin{cases} a=1 \\ b-a=0 \\ c-b=-13 \\ -c=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-12 \end{cases}$$
On obtient donc que $P(x)=(x-1)(x^2+x-12)$
Il reste à factoriser le polynôme x^2+x-12
x^2+x-12 est un trinôme du second degré avec a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme x^2+x-12 n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(1)(-12)=1+48=49=7^2$
$\Delta>0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :
$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+7}{2}=3$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-7}{2}=-4$
donc $x^2+x-12=(x-3)(x+4)$
Conclusion : $\boxed{P(x)=(x-1)(x-3)(x+4)}$

2. Factoriser le polynôme $P(x)=x^3-(2\sqrt{5}+3)x^2+(6\sqrt{5}-15)x+45$

On remarque que ni 1, ni -1 et ni 0 ne sont des racines évidentes de P . Après quelques essais avec al calculatrice, on observe que 3 est une racine de P .
Vérification :
$P(3)=(3)^2-(2\sqrt{5}+3)(3)^2+(6\sqrt{5}-15)(3)+45$
donc $P(3)=27-18\sqrt{5}-27+18\sqrt{3}-45+45=0$
donc $P(3)=0$ et 3 est une racine de P .
D'après le théorème de factorisation des polynômes, il existe un polynôme Q de degré 2 tel que $P(x)=(x-3)\times Q(x)$
donc il existe a ∈ IR, b ∈ IR et c ∈ IR tels que $P(x)=(x-3)(ax^2+bx+c)$.
$P(x)=(x-3)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx-3ax^2-3bx-3c$
$P(x)=ax^3+(b-3a)x^2+(c-3b)x-3c$
Par identification avec le polynôme $P(x)$, on obtient :
$$\begin{cases} a=1 \\ b-3a=-(2\sqrt{5}+3) \\ c-3b=6\sqrt{5}-15 \\ -3c=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2\sqrt{5} \\ c=-15 \end{cases}$$
On obtient donc que $P(x)=(x-3)(x^2-2\sqrt{5}x-15)$

Il reste à factoriser le polynôme $x^2-2\sqrt{5}\,x-115$

$x^2-2\sqrt{5}-15$ est un trinôme du second degré avec a ≠ 0, b ≠ 0 et c ≠ 0

de plus ce n'est pas une identité remarquable donc on utilise le discriminant.

$\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{5})^2-4(1)(-15)=20+60=80=(4\sqrt{5})^2$

$\Delta>0$ donc le trinôme admet deux racines réelles :

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{2}=3\sqrt{5}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2\sqrt{5}-4\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{5}$

donc $x^2+x-12=(x-3\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$

Conclusion : $P(x)=(x-3)(x-3\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$

3. Factoriser le polynôme $P(x)=x^4+x^3-9x^2-7x+14$

On remarque que la somme des coefficients du polynôme est égale à 0, donc $P(1)$ doit être égal à 0.

Vérification :

$P(1)=(1)^4+(1)^3-9(1)^2-7(1)+14=1+1-9-7+14=0$

donc $P(1)=0$ et 1 est une racine évidente de P .

De plus, à l'aide de la calculatrice, on observe que -2 est aussi une racine de P .

Vérification :

$P(-2)=(-2)^4+(-2)^3-9(-2)^2-7(-2)+14$

donc $P(-2)=16-8-36+14+14=0$

donc $P(-2)=0$ et -2 est une racine de P .

D'après le théorème de factorisation des polynômes, il existe un polynôme Q de degré 2 tel que $P(x)=(x-1)(x+2)\times Q(x)$

donc il existe a ∈ ℝ, b ∈ ℝ et c ∈ ℝ tels que $P(x)=(x-1)(x+2)(ax^2+bx+c)$

$P(x)=(x-1)(x+2)(ax^2+bx+c)=(x^2+x-2)(ax^2+bx+c)$

donc $P(x)=ax^4+(b+a)x^3+(c+b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

Par identification avec le polynôme P(x), on obtient :

$$\begin{cases} a=1 \\ b+a=1 \\ c+b-2a=-9 \\ c-2b=-7 \\ -2c=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-7 \end{cases}$$

Donc on a $P(x)=(x-1)(x+2)(x^2-7)$

Il reste donc à factoriser x^2-7 , ce qui est simple puisque c'est une identité remarquable $x^2-7=(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})$

donc $P(x)=(x-1)(x+2)(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})$

4. Factoriser le polynôme $P(x)=x^4+7x^3+11x^2-7x-12$

On remarque que la somme de ses coefficients des termes d'exposant pair est égale à la somme de ses coefficients des termes d'exposant impair, donc $P(-1)$ doit être égal à 0.

Vérification :

$P(-1)=(-1)^4+7(-1)+11(-1)^2-7(-1)-12$
donc $P(-1)=1-7+11+7-12=0$
donc $P(-1)=0$ et -1 est une racine évidente de P.
On remarque que la somme des coefficients du polynôme est égale à 0 donc $P(1)$ doit être égal à 0.
Vérification : $P(1)=(1)^4+7(1)^3-11(1)^2-7(1)-12=1+7+11-7-12=0$
donc $P(1)=0$ et 1 est une racine évidente de P.
D'après le théorème de factorisation des polynômes, il existe un polynôme Q de degré 2 tel que $P(x)=(x-1)(x+1)\times Q(x)$
donc il existe a ∈ ℝ, b ∈ ℝ et c ∈ ℝ tels que $P(x)=(x-1)(x+1)(ax^2+bx+c)$
$P(x)=(x-1)(x+1)(ax^2+bx+c)=(x^2-1)(ax^2+bx+c)$
donc $P(x)=ax^4+bx^3+(c-a)x^2-bx-c$
Par identification avec le polynôme P, on obtient :

$$\begin{cases} a=1 \\ b=7 \\ c-a=11 \\ -b=-7 \\ -c=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=7 \\ c=12 \end{cases}$$

donc on a $P(x)=(x-1)(x+1)(x^2+7x+12)$
Il reste à factoriser $x^2+7x+12$
$x^2+7a+12$ est un trinôme du second degré avec a ≠0, b ≠ 0 et c ≠ 0
Comme $x^2+7a+12$ n'est pas une identité remarquable, on utilise le discriminant :
$\Delta=b^{-}4ac=(7)^2-4(1)(12)=49-48=1=1^2$
$\Delta>0$ donc le trinôme admet deux racines réelles :
$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}=\dfrac{-7+1}{2}=-3$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}=\dfrac{-7-1}{2}=-4$
donc $x^2+x-12=(x+3)(x+4)$
donc $P(x)=(x-1)(x+2)(x+3)(x+4)$

5. Factoriser le polynôme $P(x)=x^5-x^4-4x+4$

On remarque que la somme des coefficients du polynôme est égale à 0, donc $P(1)$ doit être égal à 0.
Vérification : $P(1)=(1)^5-(1)^4-4(1)+4=1-1-4+4=0$
donc $P(1)=0$ et 1 est une racine évidente de P.
D'après le théorème de factorisation des polynômes, il existe un polynôme Q de degré 4 tel que : $P(x)=(x-1)\times Q(x)$
Pour trouver Q nous allons poser une division Euclidienne de P par $x-1$ mais on peut aussi trouver par identification comme dans les exercices précédents :

$$\begin{array}{r|l} x^5-x^4-4x+4 & x-1 \\ \hline -(x^5-x^4)+0+0 & x^4-4 \\ -4x+4 & \end{array}$$

$$0$$

On obtient donc que $P(x)=(x-1)(x^4-4)$
or $x^4-4=(x^2-2)(x^2+2)=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$
donc $\boxed{P(x)=(x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)}$

6. Factoriser le polynôme $P(x)=x^5-10x^3+9x$

On remarque que la somme des coefficients du polynôme est égale à 0, donc $P(1)$ doit être égal à 0.
Vérification : $P(1)=(1)^5-10(1)^3+9(1)=1-10+9=0$ donc $P(1)=0$ et 1 est une racine «évidente $de P$.
De plus on remarque qu'il n'a pas de terme constant, donc $P(0)$ doit être égal à 0.
Vérification : $P(0)=(0)^5-10(0)^3+9(0)=0$
donc $P(0)=0$ et 0 est une racine évidente de P .
De plus on remarque que la somme de ses coefficients des termes d'exposant pair est égale à la somme de ses coefficients des termes d'exposant impair, donc $P(1)$ doit être égal à 0
Vérification : $P(-1)=(-1)^5-10(-1)^3+9(-1)=-1+10-9=0$
donc $P(-1)=0$ et -1 est une racine évidente de P .
On a donc -1, 0 et 1 comme racines évidente de P et d'après le théorème de factorisation des polynômes, il existe un polynôme Q de degré 2 tel que :
$P(x)=(x+1)\times x\times(x-1)\times Q(x)=(x^3-x)\times Q(x)$
Pour trouver Q nous allons poser la division Euclidienne de P par x^3-x mais on peut aussi trouver par identification comme dans les exercices précédents.

$$\begin{array}{r|l} x^5-10x^3+9x & x^3-x \\ \hline -(x^5-x^3)+0 & x^2-9 \\ -9x^3+9x & \\ 0 & \end{array}$$

On obtient donc $P(x)=x(x-1)(x+1)(x^2-9)$
or $x^2-9=(x-3)(x+3)$ donc $\boxed{P(x)=x(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)}$

7. Factoriser le polynôme $P(x)=x^8-1$

x^8-1 est une identité remarquable et donc on peut factoriser rapidement :
$x^8-1=(x^4-1)(x^4+1)=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$
donc $\boxed{P(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}$

AN212 Savoir décrire la courbe d'une fonction polynôme du second degré.

1. Décrire la courbe de la fonction $f:x\longmapsto x^2+6x-4$

Transformons x^2+6x-4 pour trouver sa forme canonique.
On peut utiliser cette formule :

$$x^2+bx=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

x^2+6x est le début d'une identité remarquable :

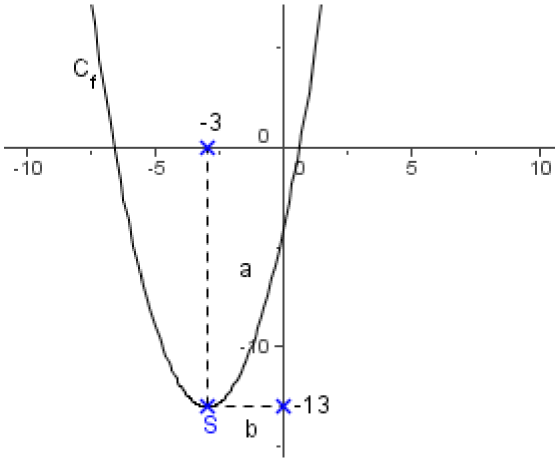
$x^2+6x=(x+3)^2-3^2=(x+3)^2-9$

donc $x^2+6x-4=(x+3)^2-9-4=(x+3)^2-13$

Une forme canonique de x^2+6x-4 est $(x+3)^2-13$

d'après le cours, la courbe de *f* est obtenue par celle de la fonction carrée à laquelle on a appliqué deux translations : Une de $-3\vec{i}$ et une autre de $-13\vec{j}$.

C_f est donc une parabole de sommet $S(-3;-13)$ tournée vers le haut. Cette parabole admet pour axe de symétrie la droite d'équation x=-3.



2 Décrire la courbe de la fonction

$g: x \longmapsto \frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{7}{18}$

Factorisons le trinôme par $-\frac{1}{2}$:

$-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{7}{18}=-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{7}{9}\right)$

Étudions maintenant la fonction $h(x)=x^2+\frac{2}{3}x+\frac{7}{9}$

On commence par utiliser cette formule :

$$x^2+bx=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$x^2+\frac{2}{3}x$ est le début d'une identité remarquable

$$x^2+\frac{2}{3}x=\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}$$

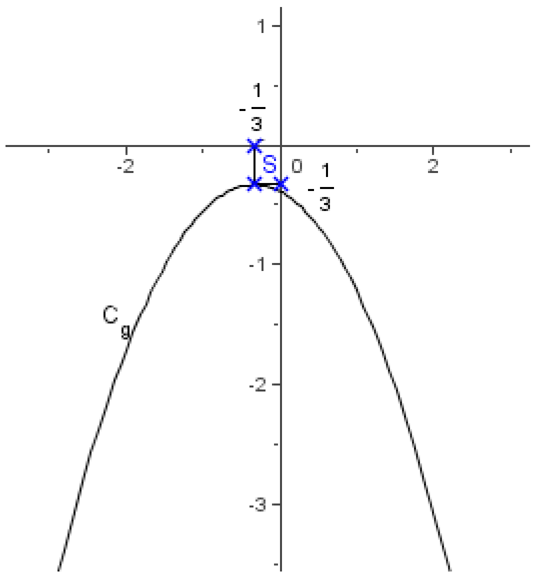
donc $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{7}{9}=\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}+\frac{7}{9}=\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{6}{9}=\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$

donc $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{7}{9}=-\frac{1}{2}\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right]$

d'après le cours, la courbe de h est obtenue par celle de la fonction carrée à laquelle on a appliqué deux translations : une de $-\frac{1}{3}\vec{i}$ et une autre de $\frac{2}{3}\vec{j}$.

C_h est donc une parabole de sommet $S\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ tournée vers le haut.

Or $g(x)=-\frac{1}{2}h(x)$ donc C_g est un parabole de sommet $S\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$ tournée vers le bas. Cette parabole admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x=\frac{-1}{3}$



3. Décrire la courbe de la fonction $h: x \longmapsto -3x^2+24x-\frac{95}{2}$

Factorisons le trinôme par -3 :

$$-3x^2+24x-\frac{95}{2}=-3\left(x^2-8x+\frac{95}{6}\right)$$

Étudions maintenant la fonction $m : x \longmapsto x^2 - 8x + \frac{95}{6}$

On commence par utiliser cette formule :

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$x^2 - 8x$ est le début d'une identité remarquable et

$x^2 - 8x = (x-4)^2 - (4)^2 = (x-4)^2 - 16$

$x^2 - 8x + \frac{95}{6} = (-4)^2 - 16 + \frac{95}{6} = (x-4)^2 - \frac{96}{6} + \frac{95}{6}$

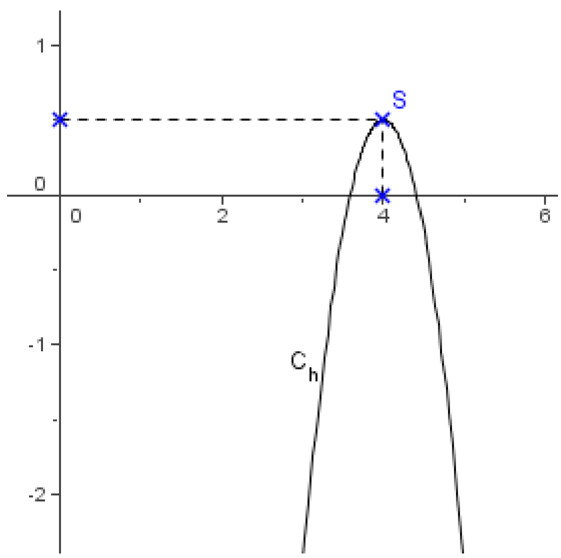
donc $x^2 - 8x + \frac{95}{6} = (x-4)^2 - \frac{1}{6}$

On a donc $h(x) = -3\left[(x-4)^2 - \frac{1}{6}\right]$

D'après le cours, la courbe représentative de m est obtenue par celle de la fonction carré à laquelle on a appliqué deux translations : une de $4\vec{i}$ et une autre de $-\frac{1}{6}\vec{j}$

C_m est donc une parabole de sommet $S\left(4 ; -\frac{1}{6}\right)$ tournée vers le haut.

Or $h(x) = -3\,m(x)$ donc la courbe de h est une parabole de sommet $S\left(4 ; \frac{1}{2}\right)$ tournée vers le bas. Cette parabole admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 4$.



AN213 Savoir décrire les variations dune fonction polynôme du second degré.

1. Étudier les variations de $f : x \longmapsto 4x^2 - 8x - 3$

Cherchons une forme canonique de $f(x)$:

$$4x^2 - 8x - 3 = 4\left(x^2 - 2x - \frac{3}{8}\right) = 4\left[(x-1)^2 - 1 - \frac{3}{8}\right]$$

donc

$$4x^2 - 8x - 3 = 4\left[(x-1)^2 - \frac{11}{8}\right] = 4(x-1)^2 - \frac{11}{2}$$

donc $f(x) = 4(x-1)^2 - \frac{11}{2}$

d'après la cours on peut directement dresser le tableau des variations :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{11}{2}$	$\nearrow$

2. Étudier les variations de $g : x \longmapsto -2x^2 - 3$

g(x) est déjà sous forme canonique puisque g(x)=-2(x-0)^2-3

On peut donc directement dresser le tableau des variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	-3	$\searrow$

3. Étudier les variations de $h : x \longmapsto -5x^2 + 10x - 5$

La forme canonique de h(x) est simple à trouver car :

h(x)=-5x^2+10x-5=-5(x^2-2x+1)=-5(x-1)^2

On peut donc directement dresser le tableau des variations :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

AN214 Savoir résoudre un problème sur les polynômes.

Problème 1 : Calcul de la somme $S_n = 1\times 2 + 2\times 3 + \ldots + n\times(n+1)$

On note $S_n = 1\times 2 + 2\times 3 + \ldots + n\times(n+1)$

1. Trouver un polynôme P de degré 3 tel que $P(x+1)-P(x)=x(x+1)$ et $P(0)=1$
2. En déduire que $S_n=P(n+1)-P(1)$
3. Démontrer alors que $S_n=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
4. Calculer S_{1000}

Correction :

1. Si P est un polynôme du troisième degré alors il existe $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$ tels que : $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

On a donc :

$$\begin{aligned} P(x+1) &= a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d \\ &= a(x^3+3x^2+3x+1)+b(x^2+2x+1)+cx+c+d \\ &= ax^3+3ax^2+3ax+a+bx^2+2bx+b+cx+c+d \\ &= ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+c+d \end{aligned}$$

On en déduit que

$P(x+1)-P(x)$

$= [ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+c+d]$
$\quad -[ax^3+bx^2+cx+d]$

a.

$= 3ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+c+d$

Or on souhaite trouver a, b et c pour que $P(x+1)-P(x)=x^2+x$, donc par identification avec x^2+x, on obtient :

$$\begin{cases} 3a=1 \\ 3a+2b=1 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=0 \\ c=-\dfrac{1}{3} \end{cases} \text{ donc } P(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x+d$$

Pour trouver d, on utilise le fait que $P(0)=1$ donc comme $P(0)=d$ alors $d=1$.

Finalement on trouve que $\boxed{P(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x+1}$

2. $S_n=1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+(n-1)\times n+n\times(n+1)$

D'après la question précédente,
chaque $a(a+1)=P(a+1)-P(a)$ pour tout $a \in \{1,\ldots,n\}$
donc

$S_n=[P(2)-P(1)]+[P(3)-P(2)]+\ldots$
$\quad +\ldots+[P(n)-P(n-1)]+[P(n+1)-P(n)]$

On remarque que presque tous les termes s'annulent et on obtient :
$S_n=-P(1)+P(n+1)=P(n+1)-P(1)$ donc $\boxed{S_n=P(n+1)-P(1)}$

3. Or d'après la question 1. $P(n+1)=\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{3}(n+1)$ et $P(1)=0$

On peut mettre (n+1) en facteur, donc

$$S_n=\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{3}(n+1)=\frac{1}{3}(n+1)[(n+1)^2-1]$$

On peut factoriser $(n+1)^2-1$ car c'est une identité remarquable, donc

$$S_n=\frac{1}{3}(n+1)(n+1+1)(n+1-1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Conclusion : $\boxed{S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$

4. On applique la formule précédente en remplaçant n par 100 :

$S_{100}=\frac{100(100+1)(100+2)}{3}=334334000$ donc $\boxed{S_{1000}=334334000}$

Problème 2 : Polynôme symétrique $P(x)=5x^4-7x^3+2x^2-7x+5$

On note $P(x)=5x^4-7x^3+2x^2-7x+5$

1. 0 est-il une racine de P ?
2. On note α une racine de P. Montrer que $\frac{1}{\alpha}$ est aussi une racine de P.
3. Démontrer que $\alpha^2-7\alpha+2-\frac{7}{\alpha}+\frac{5}{\alpha^2}=0$
4. On note $\beta=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$. Démontrer que $-5\beta^2-7\beta-8=0$.
5. Trouver alors les racines de P.

Problème 3 : Étude de $P(x)=x^4+(k-5)x^3+(6-6k^2-5k)x^2+6k(5k+1)x-36k^2$

$P(x)=x^4+(k-5)x^3+(6-6k^2-5k)x^2+6k(5k+1)x-36k^2$

1. Trouver les valeurs de k pour que 0 soit une racine évidente de P.
2. Trouver les valeurs de k pour que 1 soit une racine évidente de P.
3. Trouver les valeurs de k pour que -1 soit une racine évidente de P.
4. 2 est-il une racine évidente de P ?
5. Démontrer que 3 est une racine évidente de P.
6. Résoudre $x^4+(k-5)x^3+(6-6k^2-5k)x^2+6k(5k+1)x-36k^2=0$