

Exercice 1 (Suites géométriques)

1. Pour chacune des suites u , v , w définies ci-dessous par leur terme général, reconnaître celles qui sont géométriques et indiquer pour chacune d'entre elles le premier terme et la raison.

$$u_n = 2n^2 + 3 \quad v_n = 3^n \quad w_n = \frac{5^n}{3^{n+1}}$$

2. (a) t est une suite géométrique. On sait que $t_2 = 6$ et $t_5 = 162$. Calculer t_0 et la raison q .
 (b) On note u une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$.
 Comparer $u_0 \times u_8$ avec chacun des nombres
 $u_1 \times u_7$, $u_2 \times u_6$, $u_3 \times u_5$ et u_4^4

3. On note u la suite définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n$

Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ en fonction de n .

4. On note v la suite géométrique définie par $v_0 = 1$ et $q = 2$

Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n$ en fonction de n .

5. (a) w la suite définie par $w_0 = 0,9$ et $u_{n+1} = 0,1u_n$

Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n w_k = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n$ en fonction de n .

- (b) Sans utiliser la formule précédente, quelle est la valeur de S_2 , S_3 et S_4

- (c) Que peux-tu en conclure si on fait tendre n vers $+\infty$?

Exercice 2

Au 1^{er} janvier 2005, une ville possède 100000 habitants. Chaque année, sa population augmente de 5%. Par ailleurs, chaque année, 1000 personnes viennent en plus s'installer dans cette ville. On désigne par u_n la population de cette ville le 1^{er} janvier de l'année 2005 + n .

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , puis calculer u_1, u_2 et u_3 .

2. On définit la suite v par la relation $v_n = u_n + 20000$

- (a) Calculer v_1 , v_2 et v_3

- (b) Montrer que v est géométrique.

- (c) Calculer v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice 3

Soit la suite u définie pour tout naturel n non nul, par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n}u_n$

On admettra que pour tout entier naturel n , on a $u_n > 0$

1. Calculer les termes de la suite jusqu'à u_4 .

2. Montrer que (u) est décroissante.

3. On pose pour tout $n \geq 1$, $v_n = \frac{u_n}{n}$

- (a) Montrer que v est une suite géométrique.
- (b) Exprimer v_n en fonction de n
- (c) En déduire u_n en fonction de n

Exercice 4

Les suites u et v sont définies par :

$$u_n = \frac{3^n + 4n - 8}{4} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3^n - 4n + 8}{4}$$

On note s et d les suites définies par $s_n = u_n + v_n$ et $d_n = u_n - v_n$

1. Démontrer que s est une suite géométrique.
2. Démontrer que d est une suite arithmétique.
3. En déduire $A = \sum_{k=0}^n s_k = s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} + s_n$
4. En déduire $B = \sum_{k=0}^n d_k = d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1} + d_n$
5. On note $X = \sum_{k=0}^n u_k$ et $Y = \sum_{k=0}^n v_k$

- (a) Montrer que X et Y vérifie le système : $\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$

- (b) En déduire $\sum_{k=0}^n \frac{3^k + 4k - 8}{4} = -\frac{7}{4} - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \dots + \frac{3^n + 4n - 8}{4}$ en fonction de n .

- (c) En déduire $\sum_{k=0}^n \frac{3^k - 4k + 8}{4} = \frac{9}{4} + \frac{7}{4} + \frac{9}{4} + \dots + \frac{3^n - 4n + 8}{4}$ en fonction de n .

Exercice 5

Calculer les sommes suivantes, en fonction de n :

1. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$
2. $\sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$
3. $\sum_{k=0}^n \frac{7}{3^k} = 7 + \frac{7}{3} + \frac{7}{9} + \frac{7}{27} + \dots + \frac{7}{3^n}$