Exercice 1
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$

1. Calculer u_3, u_4 ... u_{10}
2. Exprimer u_{n+3} en fonction de u_n
3. Exprimer u_{n+6} en fonction de u_n
4. En déduire l'expression de u_{n+3k}, $k \in \mathbb{N}$, en fonction de u_n (On ne démontrera pas la formule trouvée)
5. Calculer u_{100} et u_{2005}

Exercice 2
Le problème des lapins fut proposé en 1202 par Fibonacci :
Possédant au départ un couple de lapins , combien de couples de lapins obtient-on en n mois ($n \in \mathbb{N}^*$) si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?
On note F_n le nombre de couples de lapins au n-ième mois de telle sorte que $F_1 = F_2 = 1$.

1. Calculer F_3, F_4 et F_5.
2. Déterminer une relation entre F_{n+2}, F_{n+1} et F_n.
3. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = F_{n+1} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}F_n$
   (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}u_n$
   (b) Calculer u_1
   (c) En déduire une relation entre u_n et u_{n-1}
   (d) En déduire une relation entre u_n et u_1
   (e) Exprimer u_n en fonction de n
   (f) En déduire une relation entre F_{n+1} et F_n
4. On note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)F_n + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
   (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_{n+1} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}v_n$
   (b) Calculer v_1
   (c) En déduire une relation entre v_n et v_{n-1}
   (d) En déduire une relation entre v_n et v_1
   (e) En déduire que $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$
5. Calculer F_{36}