

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront de façon importante dans l'appréciation des copies.

**Exercice :**

On note  $f$  la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4}$

1. Trouver l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Recherche de la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$

(a) Démontrer que  $\forall x \in D_f, f(x) = \frac{\frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 \left(1 - \frac{4}{x}\right)^4}$

(b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$  et en déduire celle de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

(c) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x}$  et en déduire celle de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)$

(d) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x}$  et en déduire celle de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)$

(e) En déduire celle de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. Recherche de la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$

(a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$  et en déduire celle de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

(b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x}$  et en déduire celle de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)$

(c) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x}$  et en déduire celle de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)$

(d) En déduire celle de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

4. Recherche de la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers 2

(a) On pose  $X = x - 2$  et  $g(X) = f(X + 2)$

(b) Si  $x$  tend vers 2, vers quelle valeur tend  $X$  ?

(c) Démontrer que pour tout  $X \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ , on a  $g(X) = \frac{1}{X^2} \times \frac{(X+2)^2(X+3)^3}{(X-2)^4}$

(d) Déterminer  $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{(X+2)^2(X+3)^3}{(X-2)^4}$ .

(e) Déterminer  $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X^2}$ .

(f) En déduire celle de  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

5. Recherche de la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers 4

(a) On pose  $X = x - 4$  et  $h(X) = f(X + 4)$

(b) Si  $x$  tend vers 4, vers quelle valeur tend  $X$  ?

(c) Démontrer que pour tout  $X \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$ , on a  $h(X) = \frac{1}{X^4} \times \frac{(X+4)^2(X+5)^3}{(X+2)^2}$

(d) Déterminer  $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{(X+4)^2(X+5)^3}{(X+2)^2}$ .

(e) Déterminer  $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X^4}$ .

(f) En déduire celle de  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$