Exercice1: Partie A.

1. Soit r la distance supplémentaire qu'Aline parcourt d'une semaine sur l'autre.
   Donc pour n= 1 à 14 on a $u_{n+1} = u_n + r$.
   On a donc une suite arithmétique de raison r.

2. On a donc $u_n = u_p + (n-p)r$ d'où $u_{15} = u_1 + 14r$ soit
   $118 = 20 + 14r$ donc la raison est **r = 7.**

3. La distance totale parcourue par Aline au bout des 15 semaines est:

$$S_{15} = u_1+u_2+...+u_{15} = \sum_{i=1}^{15} u_i = 15\times\frac{u_1+u_{15}}{2} = 15\times\frac{118+20}{2} = 1035$$

   Aline aura parcouru 1035 km.

Partie B.

1. Chaque semaine, la distance est augmentée de 13,5 % donc $v_{n+1} = \frac{113{,}5}{100} \times v_n = 1{,}135\times v_n$
   ce qui signifie que la suite (v_n) est géométrique de raison 1,135.
2. (v_n) est géométrique de raison 1,135 donc $v_{15} = v_1\times(1{,}135)^{14} \approx 117{,}75$.
   L'arrondi à l'unité de v_{15} est 118.
3. La distance totale parcourue par Blandine au bout des 15 semaines est:

$$S'_{15} = v_1+v_2+...+v_{15} = \sum_{i=1}^{15} v_i = v_1 \times \frac{(1{,}135)^{15} - 1}{1{,}135 - 1} \approx 841{,}85$$

Blandine aura parcouru environ 842 km.

Partie C.

1. $w_1=20$ $w_2=25$ $w_3=30{,}25$
- $w_2 - w_1 \neq w_3 - w_2$ donc (w_n) n'est pas arithmétique.
- $\frac{w_2}{w_1} \neq \frac{w_3}{w_2}$ donc (w_n) n'est pas géométrique.

2. $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{w_{n+1}+80}{w_n+80} = \frac{1{,}05w_n+4+80}{w_n+80} = \frac{1{,}05w_n+84}{w_n+80} = \frac{1{,}05(w_n+80)}{w_n+80} = 1{,}05$

Donc la suite (t_n) est géométrique de raison 1,05.

3. (t_n) est géométrique de raison 1,5 et de premier terme $\mathbf{t_1} = 20+80=100$
donc $t_n = 100\times1{,}05^{\,n-1}$.
$w_n = t_n - 80$ donc $\mathbf{w_n = 100\times1{,}05^{\,n-1} - 80}$.

4. La distance totale parcourue par Caroline au bout des 15 semaines est:

$S''_{15} = w_1+ w_2 +...+ w_{15} = t_1 - 80 + t_2 - 80 + ... + t_{15} - 80 = (t_1 + t_2 + ... + t_{15}) - 15 \times 80$

$t_1 + t_2 + ... + t_{15} = 100 \times \frac{1-1{,}05^{15}}{1-1{,}05}$

$w_1+ w_2 +...+ w_{15} = 100 \times \frac{1-1{,}05^{15}}{1-1{,}05} - 1200 \approx 957{,}86$

Caroline aura parcouru environ 958 km.

Exercice 2:

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \leq 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{-1}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2+1}$.

Je note (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \frac{-1}{n^2+1}$

et (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = \frac{1}{n^2+1}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq u_n \leq w_n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$ ce qui signifie que (v_n) et (w_n) convergent vers 0

donc d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge elle aussi vers 0.

b) $v_n = \dfrac{3^n}{5^n} - \dfrac{1}{5^n} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n - \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

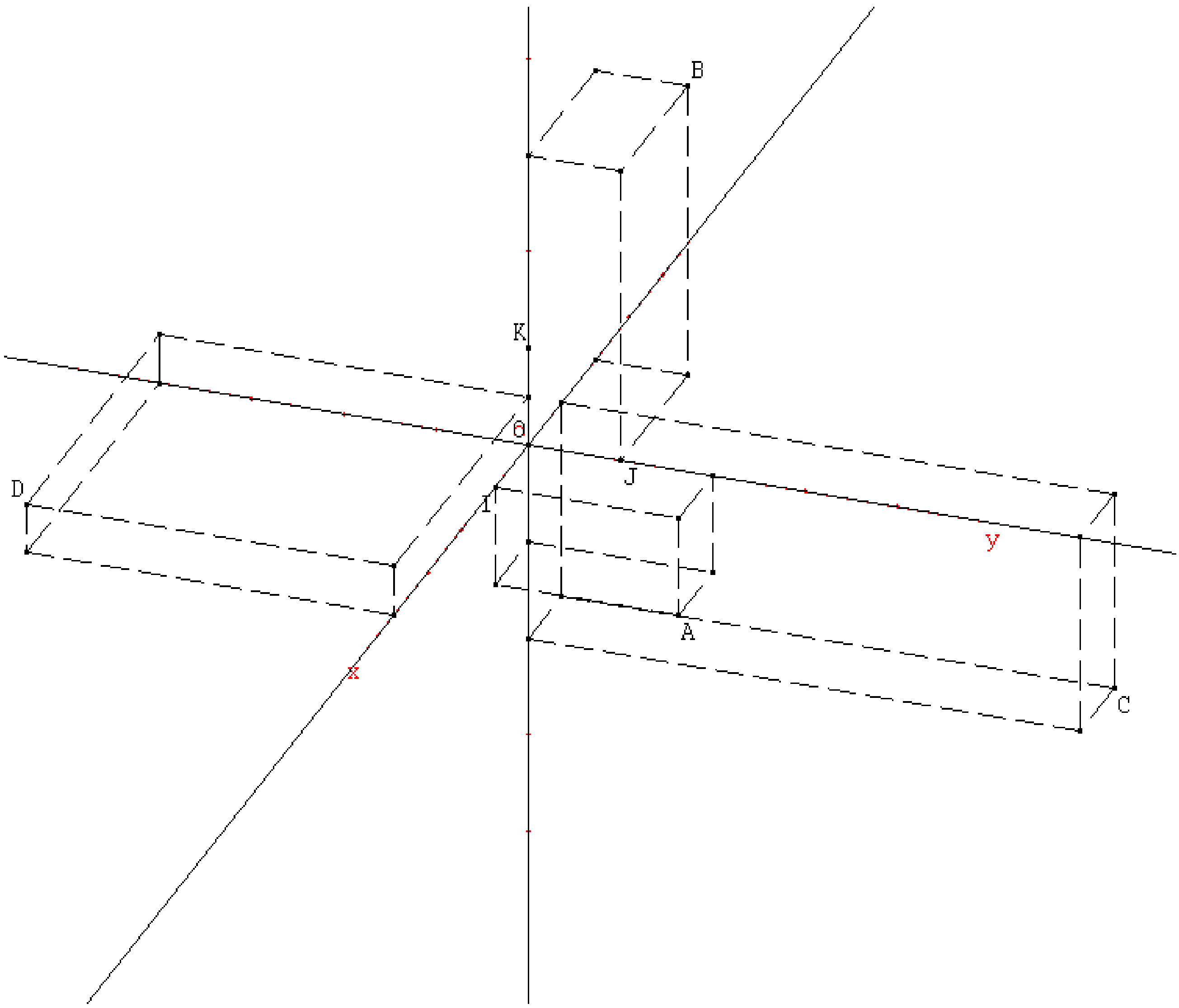
$\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ et $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ définissent deux suites géométriques de raison stictement comprises entre –1 et 1 .
Donc ces deux suites convergent vers 0. Donc la suite (v_n) converge vers 0.

c) La fonction associée à la suite (w_n) est la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \dfrac{4x^3 - 12x^2 + 5}{-5x^2 + 3x}$

La limite en + ∞ d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.Donc:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4x^3}{-5x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{4x}{5}\right) = -\infty$ Donc la suite (w_n) diverge vers $-\infty$

Exercice 3 : **1.**



2.

M milieu de [AB] donc M(-0,5 ; 1,5 ; 1)

3. $AC = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$

4. Le plan P parallèle au plan(OIK) a une équation du type y = a où a est un réel.
Comme B est un point de P, a = 1 donc une équation cartésienne de P est : y = 1.

5. $\overrightarrow{AB}$ (-3 ; -1 ; 4) $\overrightarrow{AC}$ (-2 ; 4 ; -1) $\overrightarrow{AD}$ (3 ; -6 ; 1,5)

$$\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{AC} + b\,\overrightarrow{AD} \iff \begin{cases} -3 = -2a + 3b \\ -1 = 4a - 6b \\ 4 = -a + 1{,}5b \end{cases} \iff \begin{cases} -3 = -2(1{,}5b - 4) + 3b \\ -1 = 4(1{,}5b - 4) - 6b \\ a = 1{,}5b - 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3 = -3b + 8 + 3b \\ -1 = 6b - 16 - 6b \\ a = 1{,}5b - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} -3 = 8 \quad \text{impossible} \\ -1 = -16 \quad \text{impossible} \\ a = 1{,}5b - 4 \end{cases}$$

Donc on ne peut pas trouver deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{AC} + b\,\overrightarrow{AD}$

6. Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires et si on ne peut pas trouver deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AB} = a\,\overrightarrow{AC} + b\,\overrightarrow{AD}$ alors ces 3 vecteurs ne sont pas coplanaires...
<u>mais</u> $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont-ils non colinéaires?

$-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.

On peut en particulier écrire $\overrightarrow{AD} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC} + 0\,\overrightarrow{AB}$

Et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont bien coplanaires.

Exercice 4 :

1. a) $\left.\begin{array}{l} (HD) \perp (AD) \\ (HD) \perp (DC) \end{array}\right\}$ Donc (HD) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (ABC)
Donc (HD) $\perp$ (ABC).

b) On a HA = HC ; FA = FC ; BA = BC
Donc les points H, F et B appartiennent au plan médiateur du segment [AC].
Ces 3 points ne sont pas alignés, donc le plan médiateur du segment [AC] est le plan (HFB).
Donc (AC) $\perp$ (BFH)

c) $\left.\begin{array}{l} (AC) \perp (BFH) \\ (DF) \subset (BFH) \end{array}\right\}$ Donc (AC) $\perp$ (DF)

2. Les droites (IJ) et (AD) sont coplanaires, elles se coupent en un point R.
R et K appartiennent au plan (IJK) donc (RK) $\in$ (IJK).
(RK) coupe [AB] et [DC] en T et L qui appartiennent à (IJK).
Les plans (ABF) et (DCG) sont parallèles donc le plan (IJK) coupe ces plans suivant des droites parallèles.
Je trace la parallèle à (IT) passant par L, cette droite coupe [HG] en M.
L'intersection du cube avec le plan (IJK) est le pentagone JITLM.