Corrigé du DS 8

Exercice 1 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 - 8(n+1) + 11 - (2n^2 - 8n + 11) = 2n^2 + 4n + 2 - 8n - 8 + 11 - 2n^2 + 8n - 11 = 4n - 6$
$4n - 6 \geq 0$ dès que $n \geq \dfrac{6}{4}$ donc pour tout $n \geq 2$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 2.
2. Pour tout entier naturel non nul n pair, $u_n > 0$ et pour tout n impair, $u_n < 0$ donc la suite (u_n) n'est pas monotone.
3. Pour tout $n \geq 2$, $n(n-1) > 0$, donc pour tout $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{2^n}{n(n-1)} > 0$
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)n}}{\dfrac{2^n}{n(n-1)}} = \frac{2^{n+1}}{n(n+1)} \times \frac{n(n-1)}{2^n} = \frac{2(n-1)}{n+1}$$
Or $\dfrac{2(n-1)}{n+1} \geq 1 \iff 2(n-1) \geq n+1$ car $n+1 > 0$ d'où $\dfrac{2(n-1)}{n+1} \geq 1 \iff 2n - 2 \geq n + 1 \iff n \geq 3$
Pour tout $n \geq 3$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et $u_n > 0$ donc la suite (u_n) est croissante à partir du rang 3.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n} \iff u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{n} < 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_n = \sin \dfrac{2n\pi}{3}$

1. $u_0 = \sin 0 = 0$, $u_1 = \sin \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $u_2 = \sin \dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $u_3 = \sin \dfrac{6\pi}{3} = \sin 0 = 0$
2. Pour tout réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc pour tout entier n, $-1 \leq \sin \dfrac{2n\pi}{3} \leq 1$ ce qui signifie que la suite (u_n) est bornée.
3. $u_{n+3} = \sin \dfrac{2(n+3)\pi}{3} = \sin \left(\dfrac{2n\pi + 6\pi}{3}\right) = \sin \left(\dfrac{2n\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin \dfrac{2n\pi}{3} = u_n$.

Exercice 3 : On nomme (u_n) la suite définie pour $n \geq 2$ par $u_n = \dfrac{3^n \times n}{2^{n-2}}$.

1. $u_2 = \dfrac{3^2 \times 2}{2^{2-2}} = 18$ et $u_3 = \dfrac{3^3 \times 3}{2^{3-2}} = \dfrac{81}{2}$
2. $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{3^{n+1} \times (n+1)}{2^{n+1-2}}}{\dfrac{3^n \times n}{2^{n-2}}} = \frac{3^{n+1} \times (n+1)}{2^{n-1}} \times \frac{2^{n-2}}{3^n \times n} = \frac{3(n+1)}{2n}$$
Pour tout entier non nul n, $3n > 2n$ donc $3n + 3 > 2n$ soit $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. De plus, pour tout $n \geq 2$, $u_n > 0$ en tant que quotient de termes strictement positifs donc $u_{n+1} > u_n$ ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante .
3. $u_{n+2} = \dfrac{3^{n+2} \times (n+2)}{2^n} = \dfrac{9 \times 3^n (n+2)}{2^n} = \dfrac{9 \times 3^n \times n + 2 \times 9 \times 3^n}{2^n} = \dfrac{9 \times 3^n \times n}{4 \times 2^{n-2}} + \dfrac{18 \times 3^n}{2^n} = \dfrac{9}{4} u_n + 18 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

Exercice 4 : On donne : $\sin x = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ et $x \in]0; \dfrac{\pi}{2}[$.

1. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \iff \cos^2 x = 1 - \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4} \iff \cos x = \pm \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$
or $x \in]0; \dfrac{\pi}{2}[$ donc $\cos x > 0$ soit $\cos x = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} = \dfrac{\sqrt{4 - 2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - 2 \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $\sin 2x = \cos 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $2x \in]0;\pi[$ donc $2x = \dfrac{\pi}{4}$ d'où $x = \dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 5 :

1. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{4}\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$

2. $\cos x + \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \iff \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2} \iff x+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$ où k est un entier relatif.
   $x+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{6}+2k\pi \iff x = -\dfrac{\pi}{12}+2k\pi$
   $x+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi \iff x = \dfrac{7\pi}{12}+2k\pi$
   Les solutions dans $]-\pi;\pi[$ de l'équation $\cos x + \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sont $-\dfrac{\pi}{12}$ et $\dfrac{7\pi}{12}$.

Exercice 6 :

$\cos^2(a-b) + \sin^2(a+b) = \dfrac{1+\cos 2(a-b)}{2} + \dfrac{1-\cos 2(a+b)}{2} = \dfrac{2+\cos(2a-2b)-\cos(2a+2b)}{2} =$
$\dfrac{2+\cos 2a\cos 2b + \sin 2a \sin 2b - (\cos 2a \cos 2b - \sin 2a \sin 2b)}{2} =$
$\dfrac{2+\cos 2a\cos 2b + \sin 2a \sin 2b - \cos 2a \cos 2b + \sin 2a \sin 2b}{2} = \dfrac{2+2\sin 2a \sin 2b}{2} = \dfrac{2(1+2\sin 2a \sin 2b)}{2} = 1+\sin 2a \sin 2b.$

Exercice 7 :

1. c.
2. c. : il s'agit de $f'(1)$
3. a : $g'(0) = \dfrac{-f'(0)}{(f(0))^2}$
4. b.
5. c : il y a indétermination
6. a.
7. b : (u_n) est croissante à partir du rang 1
8. a.
9. b.
10. b : elle n'est pas majorée