La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
de façon importante dans l'appréciation des copies.
**La calculatrice n'est pas autorisée pour ce devoir**

**Exercice 1 :** On note $f$ et $g$ les deux fonctions définies sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \qquad \text{et} \qquad g(x) = x + 1 + \frac{1}{(x-1)^2}$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a :
   $f(x) - (x+1) = \dfrac{x^2}{x-1} - (x+1) = \dfrac{x^2 - (x+1)(x-1)}{x-1} = \dfrac{x^2 - x^2 + 1}{x-1} = \dfrac{1}{x-1}$
   Donc
   $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$
   On peut donc en conclure que la droite $(\Delta)$ d'équation réduite $y = x+1$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Asymptote oblique :
   Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a :
   $g(x) - (x+1) = x + 1 + \dfrac{1}{(x-1)^2} - (x+1) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$
   Donc
   $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (g(x) - (x+1)) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{(x-1)^2} = 0$
   On peut donc en conclure que la droite $(\Delta)$ d'équation réduite $y = x+1$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de $g$ en $+\infty$ et $-\infty$.
3. On a $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ et $g(x) = x + 1 + \dfrac{1}{(x-1)^2}$
   donc $f(x) - g(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1-1}{(x-1)^2} = \dfrac{x-2}{(x-1)^2}$
   Le signe de $f(x) - g(x)$ est le même que celui de $x-2$ car $(x-1)^2$ est toujours positif dans $\mathbb{R}$
   - ▷ Si $x \in ]-\infty; 2[$ alors $x - 2 < 0$ donc $f(x) < g(x)$ et $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$.
   - ▷ Si $x \in ]2; +\infty[$ alors $x - 2 > 0$ donc $f(x) > g(x)$ et $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.
   - ▷ $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont concourantes en $A(2; 4)$

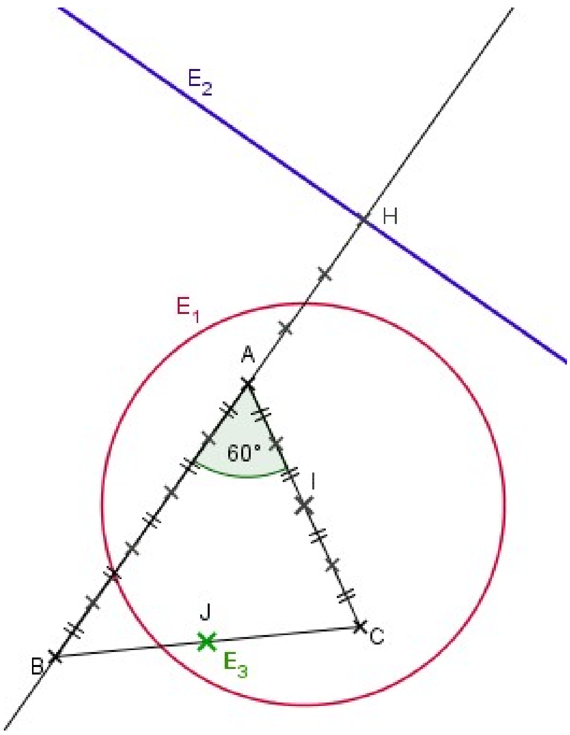
**Exercice 2 :** Voir à la fin de la correction.

**Exercice 3 :** On nomme $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $w_n = n2^n$.

1. $w_1 = 1 \times 2^1 = 2$
   $w_2 = 2 \times 2^2 = 8$
   $w_3 = 3 \times 2^3 = 24$
   $w_4 = 4 \times 2^4 = 64$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $w_n \neq 0$ donc
   $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n} = \dfrac{(n+1)2^n \times 2}{n2^n} = \dfrac{2(n+1)}{n}$
3. $(w_{3n} + 2) + (w_{3n+2} - 2) = (3n2^{3n} + 2) + ((3n+2)2^{3n+2} - 2) = 3n2^{3n} + 2 + (3n+2)2^{3n+2} - 2$
   donc
   $(w_{3n} + 2) + (w_{3n+2} - 2) = 3n2^{3n} + (3n+2)2^{3n} \times 2^2 = 2^{3n}(3n + 4(3n+2)) = 2^{3n}(15n + 8)$
   On trouve donc $a = 15$ et $b = 8$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $w_{n+2} = (n+2)2^{n+2}$
   $4(w_{n+1} - w_n) = 2^2((n+1)2^{n+1} - n2^n) = 2^2 \times 2^n(2(n+1) - n) = 2^{n+2}(n+2) = (n+2)2^{n+2}$
   donc on a bien : $w_{n+2} = 4(w_{n+1} - w_n)$

**Exercice 4 :** On note $ABC$ un triangle tel que $AC = 4$ cm, $AB = 5$ cm et $(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.




1. D'après le théorème d'Al-Kashi,
   $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$
   donc
   $BC^2 = 16 + 25 - 2 \times 4 \times 5 \times \dfrac{1}{2} = 41 - 20 = 21$ donc $BC = \sqrt{21}$ car c'est une longueur.

2. Déterminer et construire sur la figure ci-dessous, les ensembles suivants :
   On note $I$ le milieu de $[AC]$ et $J$ le milieu de $[BC]$.

   (a) D'après les formules de la médiane :
   $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = MI^2 - \dfrac{1}{4}AC^2 = MI^2 - 4$
   Il faut donc trouver les points $M$ vérifiant :
   $MI^2 = 9$ donc $MI = 3$ car $MI$ est une longueur.
   $E_1$ est le cercle de centre $I$ et de rayon 3 cm.

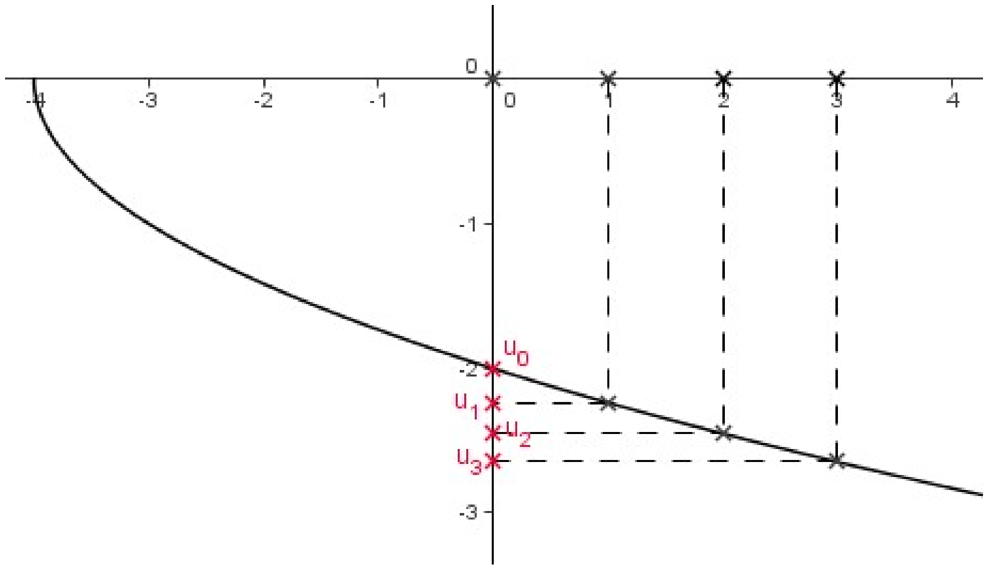
   (b) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = -15$
   On note $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur $(AB)$ alors $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{A}B$ sont de sens contraire et
   $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = -AH \times AB = -15$
   donc $AH = 3$ cm.
   $E_2$ est la droite passant par $H$ et perpendiculaire à $(AB)$.

   (c) D'après les formules de la médiane :
   $MB^2 + MC^2 = 2MJ^2 + \dfrac{1}{2}BC^2 = 2MJ^2 + 10.5$
   donc $MB^2 + MC^2 = 10.5 \Leftrightarrow 2MJ^2 + 10.5 = 10.5 \Leftrightarrow MJ^2 = 0 \Leftrightarrow M = J$.
   $E_3 = \{J\}$.

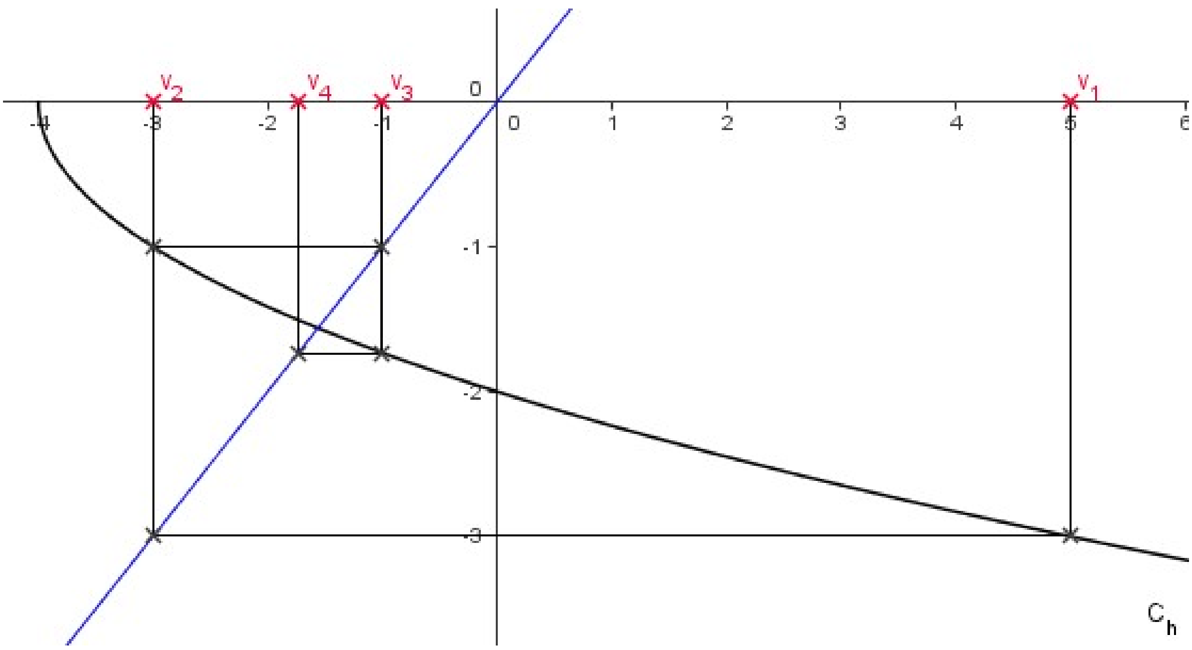
**Exercice 5 :** Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, i, j)$. On nomme $A(3; 1)$ et $B(-3; 3)$ deux points du plan.

1. On note $M$ un point du cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[AB]$ alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
   $\Leftrightarrow (3-x)(-3-x) + (1-y)(3-y) = 0 \Leftrightarrow -9 - 3x + 3x + x^2 + 3 - y - 3y + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0$
   donc une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[AB]$ est $x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0$.
2. Si $M$ est un point de cette hauteur $\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{OA} = 0$
   $\Leftrightarrow 3(-3-x) + 1(3-y) = 0 \Leftrightarrow -9 - 3x + 3 - y = 0 \Leftrightarrow 3x + y + 6 = 0$
   donc une équation cartésienne de la hauteur issue de $B$ dans le triangle $OAB$ est $3x + y - 10 = 0$.
3. On note $I$ le milieu de $[AB]$ alors ses coordonnées sont $I(0; 2)$
   $M$ est un point de la tangente alors $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AI} = 0$

$\Leftrightarrow -3(3-x)+1(1-y)=0 \Leftrightarrow -9+3x+1-y=0 \Leftrightarrow 3x-y-8=0$
donc une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}_1$ en $A$ est $3x-y-8=0$




Repère 1




Repère 2

$$u_n = \frac{\sqrt{3}[1-(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{2n}]}{1+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{2n}}$$